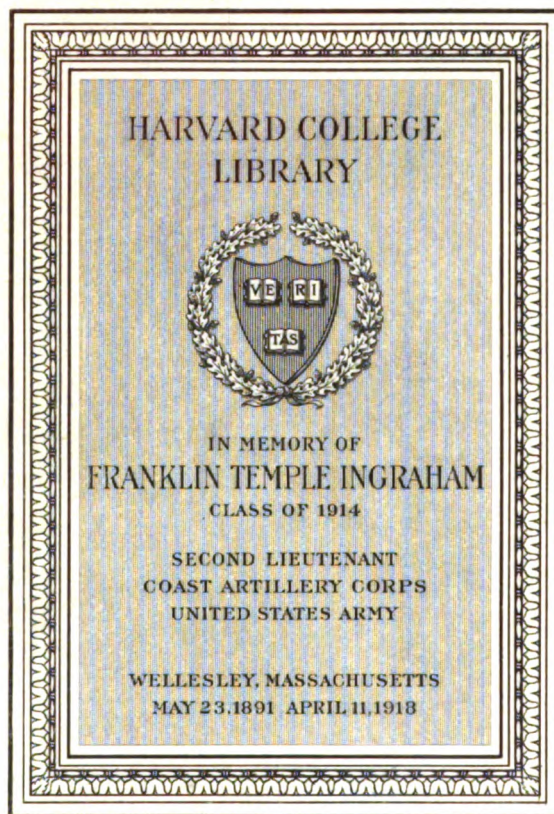
Atti della Accademia pontificia de' nuovi Lincei

Accademia pontificia de' nuovi Lincei

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

PUBBLICATI

CONFORME ALLA DECISIONE ACCADEMICA

del 22 *dicembre* 1850

E COMPILATI DAL SEGRETARIO

TOMO XXXVIII - ANNO XXXVIII

(1884-1885)

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata N.° 3.
1885

ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI
ANNO XXXVIII.

ELENCO DEI SOCI

DATA DELLA ELEZIONE	SOCI ORDINARI
2 Febbraio 1862.	Azzarelli Prof. Cav. Mattia.
3 Luglio 1847.	Boncompagni Principe D. Baldassarre.
2 Giugno 1867.	Castracane degli Antelminelli, Ab. Conte Francesco.
5 Maggio 1878.	Ciampi P. Felice.
20 Febbraio 1876.	Colapietro Prof. Dott. Domenico.
7 Maggio 1871.	De Rossi Prof. Cav. Michele Stefano.
20 Febbraio 1876.	De Rossi Re Prof. Vincenzo.
18 Giugno 1876.	Descemet Comm. Carlo.
27 Aprile 1873.	Ferrari P. G. Stanislao.
18 Giugno 1876.	Foglini P. Giacomo.
3 Giugno 1866.	Guglielmotti P. Alberto.
20 Febbraio 1876.	Guidi Cav. Filippo.
5 Maggio 1878.	Ladelci Prof. Dott. Francesco.
24 Gennaio 1875.	Lais P. Giuseppe.
5 Maggio 1878.	Lanzi Dott. Matteo.
27 Aprile 1873.	Olivieri Cav. Giuseppe.
7 Maggio 1871.	Provenzali P. Francesco Saverio.
7 Maggio 1871.	Regnani Monsignor Prof. Francesco.
16 Marzo 1879.	Sabatucci Cav. Placido.
15 Gennaio 1882.	Solivetti Dott. Alessandro.
18 Giugno 1876.	Statuti Cav. Prof. Augusto.
20 Febbraio 1876.	Tancioni Prof. Cav. Gaetano.
28 Gennaio 1883.	Tuccimei Prof. Giuseppe.
	SOCI ONORARI
5 Maggio 1878.	Sua Santità LEONE PAPA XIII.
28 Marzo 1883.	S. E. Rma il Card. Gaetano Alimonda, Arcivescovo di Torino.
17 Febbraio 1879.	S. E. Rma Haynald Card. Ludovico, Arcivescovo di Colocza.
16 Marzo 1879.	Boncompagni D. Ugo Marchese di Vignola.
5 Maggio 1878.	Ciccolini Monsignore Stefano.
25 Maggio 1848.	Cugnoni Ing. Ignazio.
5 Maggio 1878.	De Rossi Comm. Giovanni Battista.
25 Maggio 1878.	Palomba Cav. Clemente.
16 Dicembre 1883.	Sterbini Comm. Giulio.
5 Maggio 1878.	Vannutelli Monsignore Vincenzo.

Data della elezione	Soci Aggiunti
16 Giugno 1878.	Boncompagni Ludovisi D. Luigi.
5 Maggio 1878.	Bonetti Prof. D. Filippo.
12 Giugno 1881.	Buti Monsignore Prof. Giuseppe.
26 Maggio 1878.	De Courten Ing. Giuseppe Erasmo.
26 Maggio 1878.	Del Drago dei principi, D. Ferdinando.
23 Maggio 1880.	Fonti Marchese Luigi.
26 Maggio 1878.	Giovenale Ing. Giovanni.
5 Maggio 1878.	Gismondi Prof. D. Cesare.
26 Maggio 1878.	Paloni Prof. D. Venanzio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Eugenio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Odoardo.
12 Giugno 1881.	Santovetti Prof. D. Francesco.
5 Maggio 1878.	Seganti Prof. Alessandro.
26 Maggio 1878.	Zama Prof. Edoardo.
	Soci Corrispondenti italiani
27 Aprile 1873.	Bertelli P. Timoteo, Professore al Collegio alla Querce, Firenze.
11 Maggio 1851.	Betti Comm. Enrico, Professore nella R. Università di Pisa.
12 Giugno 1881.	Bruno Prof. D. Carlo, Mondovì.
23 Aprile 1876.	Cecchi P. Filippo, Direttore dell'Osservatorio Ximeniano, Firenze.
22 Febbraio 1885.	Cerebotani Prof. Luigi, Verona.
23 Maggio 1880.	De Andreis Ingegnere Angelo, Roma.
2 Maggio 1858.	De Gasperis Comm. Annibale, Professore nella R. Università, Napoli.
27 Aprile 1873.	Denza P. Francesco, Direttore dell'Osservatorio di Moncalieri.
18 Giugno 1876.	De Simoni Cav. Avv. Cornelio, Segretario degli Archivi di Stato, Genova.
23 Maggio 1880.	Donati Biagio, Civitavecchia.
12 Giugno 1881.	Egidi P. Giovanni, Roma.
23 Aprile 1876.	Galli Prof. D. Ignazio, Direttore dell'Osservatorio meteorico municipale, Velletri.
23 Aprile 1876.	Garibaldi Prof. Pietro Maria, Direttore dell'Osservatorio meteorologico, Genova.
19 Aprile 1885.	Genocchi Prof. Angelo, Torino.
19 Aprile 1885.	Grassi Landi Monsignore Bartolomeo, Roma.
28 Gennaio 1883.	Mazzetti Ab. Giuseppe, Modena.
12 Giugno 1881.	Medichini prof. D. Simone, Viterbo.
1 Aprile 1860.	Meneghini Comm. Prof. Giuseppe, Pisa.
19 Aprile 1885.	Mercalli Prof. Sac. Giuseppe, Monza.

Data della elezione	Soci Corrispondenti italiani
22 Febbraio 1885.	Luvini Prof. Giovanni, Torino.
15 Gennaio 1882.	Ragona prof. Domenico, Modena.
19 Aprile. 1885.	Rossi Prof. Stefano, Domodossola.
4 Maggio 1849.	Scacchi Prof. Arcangelo, Napoli.
28 Gennaio 1883.	Seghetti Dott. Domenico, Frascati.
23 Aprile 1876.	Seguenza Prof. Cav. Giuseppe, Messina.
23 Aprile 1877.	Stoppani Prof. D. Antonio, Dirett. del Museo Civico, Milano.
4 Febbraio 1849.	Tardy Comm. Placido, Professore nella R. Università, Genova.
13 Gennaio 1867.	Turazza Cav. Domenico, Professore nella R. Università, Padova.
16 Dicembre 1883.	Venturoli Cav. Dott. Marcellino, Bologna.
1 Aprile 1860.	Villa Antonio, Milano.
	Soci Corrispondenti stranieri
17 Novembre 1850.	Airy G. B. Greenwich.
21 Decembre 1873.	Bertin Emilio, ingegnere delle costruzioni navali, Brest.
8 Aprile 1866.	Bertrand Giuseppe Luigi, Membro dell' Istituto di Francia, Parigi.
17 Marzo 1878.	Breithof Nicola, Professore all' Università di Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giuseppe, Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giovanni Battista, Lovanio.
12 Giugno 1881.	Catalan prof. Eugenio, Liége.
12 Giugno 1884.	Certes prof. Adriano, Parigi.
20 Aprile 1884.	D'Abbadie Antonio, Parigi.
4 Marzo 1866.	Dausse Battista, Ingegnere idraulico, Parigi.
16 Febbraio 1879.	De Basterot Conte S.
11 Giugno 1865.	De Caligny marchese Anatolio, Versaille.
10 Giugno 1860.	De Candolle Alfonso, Ginevra.
16 Dicembre 1883.	De Jonquières, Ammiraglio, Parigi.
4 Marzo 1866.	De Saint-Venant, Membro dell'Acc. delle scienze dell'Istituto di Francia, Vendôme.
16 Febbraio 1879.	Di Brazzà Savorgnan Conte Pietro.
10 Luglio 1853.	Du Bois Reymond E., Berlino.
8 Aprile 1866.	Fizeau Armando Ippolito, Membro dell' Acc. delle scienze dell'Istituto di Francia, Parigi.
22 Febbraio 1874.	Gilbert Filippo, Professore nell' Università cattolica di Lovanio.
17 Novembre 1850.	Henry, Segretario dell'Istituto Smitsoniano di Washington.

Data della elezione	Soci Corrispondenti stranieri
6 Luglio 1873.	Hermite Carlo, Membro dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Francia.
18 Giugno 1876.	Joubert P. Carlo.
4 Marzo 1866.	Le Joli Augusto, Cherbourg.
12 Giugno 1881.	Le Paige Prof. Costantino, Liége.
10 Luglio 1853.	Liais E. Astronomo in Parigi.
10 Luglio 1853.	Malmsten Dott. C. G. professore di matematica nell'Università di Upsal.
20 Aprile 1884.	Meignan Monsignor Guglielmo, Arcivescovo di Tours.
10 Luglio 1853.	Neumann Dott. Professore nell'Università di Könisberg.
18 Giugno 1876.	Pepin P. Teofilo.
28 Gennaio 1883.	Perry P. Stefano Giuseppe, Direttore dell'Osservatorio di Stonyhurst.
20 Aprile 1884.	Renard, R. P. Bruxelles.
10 Luglio 1853.	Roberts G. professore al collegio Monayhan, Dublino.
20 Aprile 1884.	Roig y Torres Prof. Raffaele, Barcellona.
2 Maggio 1858.	Sabine Edoardo, Londra.
20 Gennaio 1884.	Schimd D. Julius, Professore nell'Università di Tubbinga.
10 Giugno 1860.	Soret Luigi, Ginevra.
2 Maggio 1858.	Thomson Guglielmo, Professore nell' Università di Glasgow.
2 Maggio 1858.	Wehlberg Pietro Federico, Stockolm.

Presidente

Conte Ab. Francesco Castracane degli Antelminelli.

Segretario

Cav. Prof. Michele Stefano De Rossi

Vice Segretario

P. Giuseppe Lais.

Comitato Accademico

Conte Ab. F. Castracane. Prof. M. S. de Rossi.
Prof. M. Azzarelli. P. F. S. Provenzali.
P. G. S. Ferrari.

Commissione di censura

Principe D. B. Boncompagni. Prof. A. Statuti.
P. G. S. Ferrari. P. F. S. Provenzali.

Tesoriere

P. G. S. Ferrari.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE Iª DEL 21 DICEMBRE 1884

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SULLA TRASPARENZA DELL'ACQUA DI MARE
NOTA
DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

Le radiazioni solari possono esercitare qualche azione chimica nelle grandi profondità sottomarine? Fu questo il quesito che sul cominciare del nuovo anno accademico il nostro ch. Presidente volgeva ai suoi colleghi ad occasione delle recenti esplorazioni eseguite nei grandi fondi dalle Commissioni a tale scopo nominate da vari Governi e specialmente dall'Inghilterra e dalla Francia. Dopo i risultati ottenuti da queste Commissioni non è più lecito sostenere l'antica ipotesi che nei mari la vita sia limitata a qualche centinaio di metri sotto la superficie; ma è fatto certo che a cinque e più chilometri di profondità passano per tutti gli stadi della vita innumerabili organismi di svariatissime forme, dei quali alcuni anche per vaghezza e vivacità di colorito non la cedono a quelli che vivono in vicinanza delle coste ed ovunque la luce solare esercita liberamente il suo influsso (1). E

(1) Le collezioni zoologiche e mineralogiche raccolte nel fondo del mare dalle sole Commissioni del Travailleur nel 1881 e 1882 e del Talisman nel 1883 furono si copiose da somministrare tutto il materiale della grande Esposizione aperta al pubblico nei locali annessi al Museo di Storia naturale di Parigi.

se questo influsso non giunge e farsi sentire in quegli abissi, come si potranno conciliare le recenti scoperte coi principi ammessi da tutti i naturalisti sulla necessità della luce pel completo sviluppo e colorazione degli esseri organizzati?

Alcuni sono di opinione che nei grandi fondi sottomarini la luce solare possa essere surrogata dalla fosforescenza, tanto comune fra gli abitanti delle acque che non di rado la superficie del mare presenta nella notte per lunghi tratti l'apparenza del latte o della neve. Questa ingegnosa ipotesi quanto agli effetti puramente fisiologici della luce, ossia per ciò che riguarda i fenomeni della visione, non ha nulla d'inverisimile, anzi deve dirsi oltremodo probabile, se non altro perchè i pesci appartenendo in gran parte alla categoria degli animali notturni, hanno spesso bisogno di un altro mezzo diverso dalla luce solare per mettersi in comunicazione cogli oggetti esteriori. Non è così quanto agli effetti chimici della luce, pei quali non sembra che le radiazioni solari possano essere sostituite dallo splendore fosforico. È antica osservazione che in molti animali marini in attuale condizione di vita la fosforescenza non è permanente, ma solo la manifestano quando ne sentono il bisogno o vengono a ciò stimolati da qualche agente esteriore come p. e. da notevole variazione di temperatura ovvero dall'agitazione del mezzo in cui vivono o dall'attrito di altri corpi. Di più si è osservato in molti dei suddetti animali che per divenire fosforescenti devono produrre delle contrazioni nelle loro membra, onde presto si stancano e cessano di essere luminosi, nè tornano nuovamente a splendere se prima non si sono riposati per qualche tempo. La luce da essi emanata deve dunque mancare di quella continuità di azione che sempre si richiede affinchè le deboli luci producano effetti chimici. Che se non ostante la tranquillità del mezzo e la bassa e costante temperatura che regnano nelle acque profonde, l'emanazione fosforica potesse continuare per un tempo abbastanza lungo ed anche essere permanente, come sembra verificarsi in molti pesci, resterebbe sempre a vedere se la luce che ne proviene sia o no dotata d'azione chimica. Quello che su tale proposito abbiamo dalla sperienza è che le radiazioni emesse dagli animali marini fosforescenti non hanno finora dato che delle imagini prismatiche continue, ossia prive di righe oscure e luminose, epperò simili a quelle de' corpi incandescenti, che non emettono radiazioni chimiche attive o solo debolissime (1). Del resto anche in tutte le altre

(1) V. *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*. — T. 59. pag. 509.

luci fosforiche, qualunque ne sia l'origine e la natura, l'azione chimica è scarsissima, nè si rende sensibile che di rado e dopo un tempo lunghissimo. Sembra dunque potersi affermare che se gli animali marini sono a dovizia dotati della facoltà di splendere, ciò non è per supplire all'azione chimica delle radiazioni solari; ma forse perchè hanno essi bisogno di un mezzo che secondo le circostanze gli renda capaci e d'illuminare lo spazio circostante e di sottrarsi alla vista dei loro persecutori.

Per ciò che riguarda le azioni chimiche necessarie al perfetto sviluppo e colorazione degli organismi viventi v'ha chi pensa, che nelle circostanze eccezionali de' grandi fondi possano quelle azioni compiersi senza la presenza e l'influsso chimico della luce. A formarsi una giusta idea di questa ipotesi conviene distinguere la fauna dei grandi fondi dalla flora. Quanto alla fauna gli animali terrestri che menano tutta la loro vita nei sotterranei o solo escono all'aperto a notte buia, provano abbastanza che anche nelle circostanze ordinarie la luce non è indispensabile al perfetto sviluppo e conservazione della vita animale: sotto questo rispetto non v'è dunque che opporre alla suddetta ipotesi. Quanto poi alla colorazione della pelle e degli altri integumenti esteriori, sebbene non sia dimostrato che in ogni caso vi debba intervenire l'azione della luce, pure è certo che un colorito molto splendido non si vede negli animali che vivono costantemente all'oscuro, come è certo che la luce rinforza ed abbellisce il colorito di quelli che vi stanno lungamente esposti; d'onde viene che il dorso sia meglio colorito che il ventre sì negli animali terrestri che negli acquatici. Ora se ci facciamo a considerare i risultati delle recenti esplorazioni sottomarine, troviamo che nei crostacei de' grandi fondi non è raro un colore rosso molto intenso e che fra gli echinodermi e polipai tratti su da profondità maggiori di 2000 metri unitamente a dei frammenti delle rocce a cui erano stabilmente fissati, presentarono colori non meno vivi di quelli che si ammirano nei loro congeneri che vivono a piccole profondità. Ciò fu pure osservato in alcune attinie e pentacrini, il cui splendido colore verde d'erba era del tutto simile al colore delle attinie che abitano lungo le coste del Mediterraneo. È vero che siffatta ricchezza di colorito non è molto frequente negli abitanti de' grandi fondi, segnatamente nei pesci che in generale sono neri o al più screziati di bianco. Ma ciò potrebbe anche attribuirsi al costume di tali pesci di rimanere per lo più sepolti nella melma. Una prova di tale costume l'abbiamo dal fatto che quei pesci si sono quasi sempre trovati col corpo più o meno incrostato da parti fangose tenacemente aderenti alla cute. Ma qua-

lunque sia la causa di questa mancanza di colorito in molti animali de'grandi fondi, se da una parte tale mancanza è favorevole all'opinione che in quelle profondità le azioni chimiche si compiano indipendentemente dall'influsso della luce, dall'altra parte poi si trova grande difficoltà nell'ammettere che nella stessa classe di animali, come nei crinoidi e nelle attinie, la medesima vivezza e qualità di colorito si produca tanto sotto l'influsso della luce solare, che senza l'intervento di alcuna sorgente luminosa capace di azione chimica.

Questa difficoltà cresce di molto se dalla fauna de'grandi fondi passiamo a considerarne la flora; per la ragione che attese le molteplici sperienze colle quali i naturalisti da Ray, Bonnet, T. de Saussurre, ecc., fino ai nostri giorni (1) hanno dimostrata la genesi della clorofilla, non possiamo più dubitare che la perfetta nutrizione delle piante non ha mai luogo senza il concorso di radiazioni atte ad agire chimicamente. Il dubbio solo può nascere intorno al supposto, voglio dire se in realtà esista una flora de'grandi fondi. I moderni esploratori degli abissi oceanici (2) sembrano disposti ad ammettere che al di là di 150 metri sotto la superficie del mare non vivano esseri vegetali, ma solo animali; ed è così che danno ragione dei caratteri di carnivori osservati nei pesci che abitano le maggiori profondità. Questo limite di 150^m assegnato alla flora sottomarina non è ammesso da tutti i geologi (3), nè si può ritenere come dato dalla sperienza che per le piante di dimensioni ordinarie, le quali non sembra che finora si sieno trovate a profondità molto grandi. E d'altronde non è molto probabile che sotto l'enorme pressione di più centinaia d'atmosfere possano crescere delle piante fino ad acquistare le ordinarie dimensioni, mentre vediamo che i pesci, i crostacei e tutti gli animali che abitano costantemente gli abissi sottomarini sono sempre molto più piccoli dei loro simili che vivono presso la superficie delle acque (4). Se poi si tratti di pianticelle piccolissime può

---

(1) V. Becquerel. — *La lumière.* — T. 2. p. 266.

(2) V. H. Filhol. — *Voyage du Talisman.* — *La Nature.* — An. 1884 premier Sem. p. 183.

(3) Altri geologi assegnano alla flora sottomarina dei limiti assai più estesi « Tandis que certaines hydrophytes se trouvent chaque jour couvertes et découvertes alternativement par la » marée, d'autres vivent dans les abîmes de l'océan à la profondeur énorme de plus de 300^m ». C. » Lyell. — Principes de Géologie 4e par. p. 141.

(4) Gli effetti di compressione e ristringimento prodotti dal peso dell'acqua soprastante ai grandi fondi si può argomentare da quei dischi di sughero che fecero parte dello scandaglio a rete nelle esplorazioni del Talisman e tuttora si conservano nel Museo di Storia naturale a Parigi. Questi dischi dopo alcuni giorni di uso sotto la pressione dell'acqua si erano già ridotti alla metà del loro volume primitivo ed avevano acquista la consistenza del legno.

bene essere avvenuto che queste sieno sfuggite alla osservazione o per la loro estrema piccolezza o perchè nell'atto che furono svelte dalla draga e durante l'ascensione rimasero frantumate e scontrafatte per modo da non potersene facilmente accertare la presenza. A conferma di ciò abbiamo l'autorità del ch. nostro collega ed illustre micrografo il Conte F. Castracane, il quale fu già d'opinione (1) ed ora l'ha dimostrato con alcune prove di fatto che le diatomee, cioè quelle alghe microscopiche che tanto abondano alla superficie delle acque salse e delle dolci, vivono anche in fondo ai mari. Di cinque diversi scandagli fatti dal Travailleur nel fondo del Mediterraneo Egli ha potuto accertarsi che tre erano assolutamente ricchi di diatomee e che anche gli altri due non ne erano del tutto privi. Se dunque le diatomee vegetano in realtà e si propagano nelle abissali profondità dei mari, i limiti assegnati alla flora sottomarina non hanno più luogo e la presenza nei grandi fondi di qualche sorgente di azione actino-chimica sembra indispensabile.

Ma è poi certo che in fondo ai mari non penetri mai filo di luce diurna e che le radiazioni solari non valgano ad esercitarvi azione chimica di sorta? Le prove che si sogliono arrecare a favore della totale mancanza di luce solare nel fondo dei mari sono tratte in parte dal potere assorbente dell'acqua e dalla invisibilità degli oggetti in essa profondamente immersi, ed in parte dalle anomalie osservate negli animali che vivono di continuo in quei profondi recessi.

Sul potere assorbente dell'acqua non si hanno prove decisive, che dimostrino nelle grandi profondità l'assorbimento essere completo per ogni specie di raggi contenuti nelle radiazioni solari. Si sa però che quando si fa passare un fascetto di luce solare attraverso uno strato d'acqua la cui spessezza vada progressivamente crescendo, il colore della luce da prima bianco, a poco a poco volge al giallo, quindi al ranciato e finalmente al rosso. Ma nel tempo stesso che la quantità della luce trasmessa va scemando,

(1) V. *Atti della Pont. Accad. de'N. Lincei.* — A. XXXVI, p. 195. ed A. XXXVII, p. 143. Più tardi cioè nella Sessione I[a] dell'anno XXXVIII il medesimo ch. diatomologo annunziò all'Accademia che essendosi Egli procurato dalla Commissione del Challenger il contenuto di sei oloturie pescate fra 2511 e 5274 metri di profondità, vi scoprì un gran numero di esilissime diatomee, alcune delle quali conservavano ancora il protoplasma colorato in giallo dall'endocroma. D'onde conchiuse che quelle diatomee erano state ingoiate dalle oloturie non in condizione fossile o semifossile, ma nello stato di attuale vegetazione epperò che avevano vegetato in fondo al mare; non si potendo ammettere che corpicciuoli tanto esili, cioè di solo qualche centesimo di millimetro in larghezza sopra tre o quattro millimetri di lunghezza, abbandonati dalla vita possano scendere a tali profondità in così breve tempo da conservare il protoplasma e l'endocroma.

l'acqua che non è direttamente attraversata dal fascetto diventa luminosa diffondendo nello spazio circostante una luce azzurra o verdognola, cioè complementaria della luce trasmessa. Quindi si vede che la luce penetrata nell'acqua e non trasmessa, solo in parte cessa di esistere come luce, un'altra parte non piccola si diffonde per la massa liquida e la illumina. Ed è appunto per questa diffusione interna che il colore dell'acqua marina apparisce tanto più azzurro quanto è maggiore la profondità. Ma prescindendo dalla diffusione interna, che non possiamo dire fin dove si estenda, e solo considerando la luce trasmessa, sebbene questa vada sempre diminuendo per tutte le profondità sperimentate, pure non è provato che tale diminuzione si estenda ad ogni specie di raggi luminosi. L'analogia di ciò che accade col calorico oscuro induce piuttosto a credere il contrario. Sono note le sperienze colle quali Delaroche, Melloni ed altri fisici mostrarono che nei corpi diafani l'assorbimento del calorico per lo più non cresce proporzionalmente allo spessore del corpo assorbente, ma v'ha de'raggi oscuri pei quali certi corpi sono perfettamente diatermici. È dunque assai verisimile che ciò valga eziandio pei raggi luminosi e che ve ne abbia di quelli pei quali l'acqua sia perfettamente diafana. E sebbene tali raggi possano essere deboli a segno da non agire sull'organo della vista, non ne segue che sieno affatto privi di azione chimica. Fra l'impressione della luce sull'occhio e le azioni chimiche prodotte dalla luce passa una differenza molto considerevole. Sull'occhio l'impressione della luce dura un tempo brevissimo, onde i singoli impulsi che esso riceve per l'azione continuata di un raggio luminoso non si sommano assieme, di maniera che una luce incapace di produrre la sensazione della vista, continuando ad agire per molto tempo arrivi poi finalmente a destare quella sensazione. Non è così delle azioni chimiche, le quali in realtà non essendo altro che semplici azioni meccaniche, possono accumularsi e conservarsi nei loro effetti, a quel modo che un urto, sia pure debolissimo, se venga ripetuto un gran numero di volte produce lo stesso effetto di un urto più energico e di meno lunga durata.

L'ipotesi che l'acqua sotto qualunque profondità sia perfettamente diafana rispetto ad alcuni raggi sembrerà in contradizione col rapido indebolimento che soffre la luce crescendo la spessezza dello strato d'acqua che attraversa. Tale contradizione svanisce se si osserva che l'assorbimento della luce è un fenomeno complesso, dovuto in parte alle molecole pesanti ed in parte all'etere misto alle molecole medesime. Per l'acqua questa doppia origine di assorbimento ci è pure indicata dal fatto che il suo potere assorbente

per i raggi luminosi si esercita di preferenza sui più rifrangibili, mentre poi il suo potere assorbente per i raggi oscuri di minima rifrangibilità supera di tanto quello della luce, che fra tutti i corpi diafani l'acqua è uno dei più adiatermici che si conoscano. Quando dunque vediamo che la luce di qualunque rifrangibilità essa sia passando per l'acqua rapidamente s'indebolisce, possiamo solo inferirne che per l'acqua delle due cause di assorbimento almeno una, probabilmente la prima, è assoluta cioè si estende ad ogni specie di raggi luminosi. Quanto all'altra essa potrebbe non estendersi che ad alcune di quelle specie o anche a tutte tranne una sola. Sicchè a conchiudere che l'azione dell'acqua sulla luce giunge fino al totale assorbimento, non basta l'aver provato il progressivo indebolirsi della luce col crescere la spessezza dell'acqua, ma bisogna anche provare che arriva finalmente un punto in cui ogni specie di raggi luminosi rimane estinta; cosa che attesa la poca intensità che possono avere i raggi trasmessi non potrebbe accertarsi mediante l'organo della vista. E se al detto fin qui si aggiunga che le radiazioni solari oltre i raggi luminosi e calorifici oscuri ne contengono molti altri, i quali sebbene incapaci di destare in noi la sensazione della luce, qualunque sia la loro intensità, pure agiscono chimicamente (1) e sono in parte trasmessi dall'acqua, con più ragione potremo conchiudere che le sperienze fatte fin ora sul potere assorbente dell'acqua non valgono a dimostrare che le radiazioni solari non possano produrre alcun effetto chimico nelle grandi profondità sottomarine (2).

---

(1) Sulla efficacia dei raggi ultra violacei a promuovere la vegetazione furono fatte molte sperienze da M. Guillemin ed il risultato fu che sotto l'azione di quei raggi la colorazione e nutrizione delle piante si opera ugualmente bene che in presenza de'raggi luminosi; solo il tempo a ciò richiesto è maggiore con quelli che con questi. *V. Ann. des Sciences naturelles* 4. *série partie botanique.*

(2) La presente nota era già consegnata per la stampa quando ebbi notizia che i Signori Fol e Serrazin di Ginevra avevano presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi (V. *Comptes Rendus du* 13 *Avril* 1885) i risultati dei loro studi sulla trasparenza dell'acqua marina. Questi studi furono fatti nella rada di Villefranche a bordo dell'*Albatros* calando a delle profondità sempre crescenti un apparato che portava delle lamine rese sensibili alla luce mediante l'albumina bromurata. Il tempo dell'esposizione alla luce filtrata attraverso l'acqua fu sempre di 10′ e la conclusione a cui pervennero è che al di là di 400 metri alcun raggio capace di azione chimica non penetra nell'acqua del mare. Ma da siffatti sperimenti non mi sembra che si possa trarre una conclusione generale per ogni sorta di raggi e di sostanze impressionabili alle radiazioni solari. Sappiamo infatti che i diversi corpi non sono sensibili alla luce dentro gli stessi limiti di rifrangibilità e che certi raggi capaci di agire chimicamente sui corpi viventi, non hanno azione o l'hanno diversa sui composti inorganici ed anche sugli organici dopo sottratti all'azione della vita. Lo stesso bromuro d'argento che tanto prontamente viene alterato dai raggi più rifrangibili, rimane insensibile ai raggi gialli, ranciati e rossi, che sono appunto i più facilmente trasmessi dall'acqua e i più efficaci a promuovere la formazione della clorofilla, e la nutrizione delle piante.

Anche meno concludenti sono le sperienze fatte sulla invisibilità dei corpi profondamente immersi nel mare. La vista di tali corpi ci può essere tolta da varie cause indipendenti dalla luce da cui sono illuminati. Primieramente bisogna tener conto della luce riflessa e diffusa dalla superficie dell'acqua e dai corpi circostanti, la quale quando sia abbastanza intensa confonde e toglie la percezione dei corpi immersi. A tale inconveniente si ovvia in parte facendo uso dello *Scopeloscopio* proposto da Arago, affine di rendere visibili gli scogli nascosti sott'acqua. Questo apparato consiste in un cannocchiale munito di un polariscopio che convenientemente orientato estingue la luce polarizzata nel primo azimut. Ma sebbene con tale artifizio si arrivi talvolta a scoprire sott'acqua degli oggetti che altrimenti passerebbero inosservati, contuttociò rimanendo sempre accessibile all'occhio la luce non polarizzata per riflessione e quella che viene diffusa dalla superficie dell'acqua e degli strati sottostanti arriva presto il punto in cui l'intensità di queste luci supera notabilmente quella emanata dal corpo immerso; il quale diventa invisibile non perchè cessi di essere illuminato, ma perchè sotto una impressione assai forte l'occhio è insensibile alle più deboli. Oltre di che la visibilità dei corpi illuminati non dipende solo dalla luce che ricevono, ma eziandio dal loro potere riflettente e diffusivo. I corpi che riflettono molto la luce o molta ne assorbono senza diffonderla, poco o nulla si vedono ancorchè sieno fortemente illuminati. Lo stesso avviene degli oggetti che hanno il medesimo colore de' corpi circostanti o del fondo su cui riposano Nel caso poi dei corpi immersi si deve anche aver riguardo alla purezza e tranquillità del liquido. In alcuni laghi d'acqua limpida e tranquilla si distinguono gli oggetti immersi anche a notabile profondità, senza bisogno di alcun artifizio che ripari l'occhio dalla luce emanata e riflessa dagli altri corpi. Più facilmente ciò accade nelle acque del mare che sogliono essere più trasparenti delle acque dolci. Presso le Antille ove il fondo del mare è gremito di conchiglie, di brecce e d'altri corpi eminentemente atti a diffondere la luce, quando l'acqua è tranquilla se ne vede il fondo fino a 150 metri di profondità, e nel mare polare del Nord presso Novaya alcuni

---

Ma la clorofilla, che nei vegetali viventi non si forma senza il concorso della luce, dopo estratta fuori dei tessuti che la contenevano si scolora per l'azione della luce stessa.

Trattandosi medesima poi di radiazioni molto affievolite dall'assorbimento l'esposizione di soli 10' non basta perchè dalla mancanza di effetto chimico se ne possa legittimamente inferire la totale assenza di raggi capaci d'azione chimica. In tali circostanze l'effetto chimico delle radiazioni non si manifesta che dopo un tempo assai lungo, ed anche allora è limitato a sole alcune specie di composti, cioè a quelli che sono sensibili ai raggi sfuggiti all'assorbimento.

naviganti hanno continuato a vederne il fondo quando lo scandaglio accusava 220 metri di profondità. Ciò importa che la luce dopo avere attraversato 440 metri d'acqua di mare conservi ancora intensità sufficiente per agire sul nostro organo della vista, non ostante la luce che questo riceve da altri corpi meglio illuminati. Quindi si vede quanto sia incerto il limite a cui possono giungere nel mare le radiazioni solari; tanto più che nei mari la trasparenza sembra dovere aumentare colla profondità. Ciò si deduce dal fatto che l'acqua fredda è più trasparente dell'acqua calda e presso il fondo del mare la temperatura è sempre più bassa che in vicinanza della superficie (1). Anche la pressione degli strati soprastanti cospirando col raffreddamento nel ravvicinare le molecole, deve facilitare la trasmissione della luce attraverso l'acqua ed i gas che abondantemente vi sono sciolti (2). Riguardo ai gas pare confermato dalla sperienza che la loro presenza faccia crescere la trasparenza dell' acqua. Certo che l'idrogeno sotto molto forti pressioni acquista la facoltà di concepire e trasmettere le vibrazioni d'ogni periodo, per modo che le righe del suo spettro col crescere la pressione si vanno sempre più dilatando finchè lo spettro diviene tutto continuo e più luminoso.

Alla grande pressione che domina in fondo ai mari si può anche attribuire che gli animali ivi dimoranti hanno l'involucro esterno tanto sottile che alcuni crostacei del gruppo degli *erinoidi* si trovarono trasparenti per modo da vedersene lo stomaco e gli altri visceri, come se questi fossero racchiusi in vasi di cristallo (3).

Le anomalie osservate negli animali che vivono nelle grandi profondità sottomarine, e si considerano come grandemente favorevoli all' opinione che in quei recessi mai non penetri raggio di luce diurna, sono quelle che risguardano l'organo della vista e la colorazione della pelle. Quanto a questa colorazione già dicemmo di sopra che sebbene negli animali de' grandi fondi i belli colori che ammiriamo in molti che vivono presso la superficie sieno spesso surrogati dal nero, dal bianco o da una tinta rosea molto languida,

(1) M. Milne Edwards nel golfo di Guascogna dai 2590 ai 5100 metri di profondità trova costantemente la temperatura + 3°,5. Ed è questa una delle più elevate che siasi osservata in simili profondità. Generalmente sul fondo dell'Oceano si trova la temperatura 0° nelle basse latitudini e nelle alte — 1°,5 ovvero — 2° e anche — 3°.

(2) La quantità di gas sciolto nelle acque de'grandi fondi è tale che delle robuste bottiglie empite d'acqua nel fondo del mare durante la campagna del Talisman, nell'atto che venivano stappate a contatto dell'aria producevano de'getti d'acqua molto più impetuosi di quelli che danno le bottiglie di acqua di Seltz.

(3) *La Nature*, 1884, prem. sem. p. 231.

non siamo perciò necessitati ad ammettere che in quelle profondità non giunga mai raggio di sole; potendo bene accadere che siffatti animali durante il giorno si tengano sepolti nel fango o in nascondigli inaccessibili alla luce, oppure che in essi per lo sviluppo della materia colorante sia necessario il concorso di altre circostanze di temperatura, pressione ecc., diverse da quelle che regnano nelle grandi profondità sottomarine. Altrettanto a un dipresso si può dire intorno all'altro fatto, cioè che negli animali de'grandi fondi l'organo visivo si trova spesso in uno stato embrionale o anche del tutto atrofizzato. Possono cioè questi animali essere portati dal loro istinto a passare quasi tutta la loro vita nei cavi degli scogli, a quel modo che p. e. la talpa ed il proteo anguino vivono nei cunicoli o nelle acque delle grotte sotterranee, epperò hanno gli occhi pochissimo sviluppati e coperti dalla pelle per modo che appena potrebbero loro servire a distinguere il giorno dalla notte. Ma ciò che più fa pel caso nostro è che se da una parte non pochi degli animali de'grandi fondi sono ciechi e scoloriti, dall'altra ve n'ha pure parecchi adorni di vivacissimi colori e forniti di buoni occhi. Anzi si è osservato che in uno stesso genere di crostacei alcune specie che abitano in fondo al mare sono provviste di occhi perfettamente sviluppati, mentre altre che vivono a non molto grandi profondità ne sono prive. Così p. e. *l'ethusa granulata* che si pesca nei mari del Nord fra 200 e 1300 metri di profondità è cieca, laddove non lo era *l'ethusa alba* catturata nell'Oceano dagli esploratori del Talisman a 5000 metri di profondità; come non lo erano il *malacosteus niger* e lo *stomias boa* pescati a 1500 e 1900 metri di profondità. (1)

Si è però notato che mentre nei pesci i quali vivono a diverse ma non molto grandi profondità, le dimensioni dell'organo visivo vanno crescendo a misura che cresce la profondità; al contrario nei pesci che abitano i grandi fondi e sono provvisti di occhi, questi per lo più nulla presentano di speciale nella struttura e sono del tutto simili a quelli dei pesci che non mai si allontanano molto dalla superficie dell'acqua. Questo fatto però non è generale; ma come fra gli abitanti degli abissi sottomarini alcuni sono ciechi, così altri hanno occhi molto grandi ed in quelli che gli hanno più piccoli, come il *bathypterois longipes* che neppure è fosforescente, le minori dimensioni dell'organo visivo possono essere vantaggiosamente com-

(1) Quanto ai crostacei M. Filhol nella sua relazione dice che « chez les animaux de cette » classe la disparition de ces organes est un fait assez rare. La plupart des espèces, même cel- » les recueillies par 5000 mètres, possèdent des yeux bien développés ». V. *La Nature*, 12 sept. 1885.

pensate da una più squisita sensibilità della retina. Del resto che i pesci de' grandi fondi sieno provvisti di occhi normali, piuttosto che alla presenza o mancanza di luce diurna in quelle profondità, sarebbe favorevole all'opinione di coloro i quali credono che sul fondo dei mari le radiazioni solari vengano surrogate dalla fosforescenza, tanto comune negli animali marini. Ma già si disse di sopra che se la luce fosforica può fare le veci della solare quanto ai fenomeni della visione, non è così quanto alle azioni chimiche, in ordine alle quali le emanazioni fosforiche neppure possono equivalere a quelle radiazioni solari, che per difetto d'intensità o eccesso di rifrangibilità non sono atte ad agire efficacemente sull'organo della vista.

Molte altre cose si potrebbero dire su questo interessante argomento; io non aggiungo altro perchè il mio scopo era solamente di mostrare che i risultati delle antiche e recenti osservazioni e sperienze non sono tali che se ne possa con certezza inferire, nelle grandi profondità sottomarine la vita essere del tutto indipendente dell'azione *actino-chimica* del Sole. Se le indagini con tanto zelo e perseveranza intraprese dei naturalisti confermeranno il completo sviluppo e vegetazione delle diatomee in fondo ai mari, allora si potrà dire non solo possibile, ma molto probabile che anche laggiù penetrino in qualche modo le radiazioni solari.

SOLUTION DES DEUX ÉQUATIONS

$$13x^4 - 11y^4 = 2z^2,\quad 8x^4 - 3y^4 = 5z^2,$$

PAR LE P. TH.LE PEPIN

1. La solution complète d'une équation indéterminée, comprise dans la formule $ax^4 + by^4 = cz^2$ exige en général une discussion d'autant plus compliquée que les nombres a, b, c sont plus grands. Les deux équations que nous allons résoudre font exception à cette règle ; celle dont les coefficients ont la moindre valeur, présente une difficulté bien plus grande que l'autre ; on ne peut la résoudre qu'au moyen de transformations dont le succès n'est pas facile à prévoir. L'autre au contraire se résout d'une manière complète au moyen de deux systèmes de formules, auxquelles on parvient par une discussion obvie.

Comme les équations proposées ne changent pas de forme lorsqu'on les divise par le plus grand commun diviseur des deux bicarrés x^4, y^4, nous supposons immédiatement que les deux nombres x, y n'ont pas de diviseur commun.

Il résulte de là que les trois nombres x, y, z sont premiers entre eux, deux à deux.

I. *Solution de l'équation* $13x^4 - 11y^4 = 2z^2$.

2. L'équation proposée peut s'écrire de la manière suivante

$$13\,(x^4 - y^4) = 2\,(z^2 - y^4),$$

et elle se ramène au système des deux équations

$$\frac{13\,(x^2 + y^2)}{z + y^2} = \frac{p}{q},\quad \frac{x^2 - y^2}{z - y^2} = \frac{2q}{p},$$

$$(1)\qquad px^2 + (2q - p)y^2 - 2qz = 0,\quad 13qx^2 + (13q - p)y^2 - pz = 0,$$

où l'on désigne par p, q deux nombres entiers et premiers entre eux. Ces deux équations sont résolues par les formules

$$\frac{x^2}{p^2 - 4pq + 26q^2} = \frac{y^2}{p^2 - 26q^2} = \frac{-z}{p^2 - 26pq + 26q^2},$$

$$\begin{cases} (a) & \mu x^2 = p^2 - 4pq + 26q^2 = (p-2q)^2 + 22q^2 \\ (b) & \mu y^2 = p^2 - 26q^2, \\ (c) & -\mu z = p^2 - 26pq + 26q^2, \end{cases}$$

dans lesquelles on désigne par μ le plus grand diviseur commun des seconds membres. L'équation (a) exige que μ soit positif, premier avec q et non divisible par 4. D'ailleurs, on déduit des trois congruences

$$p^2 - 4pp + 26q^2 \equiv 0,\ p^2 - 26\ q^2 \equiv 0;\ p^2 - 26pq + 36q^2 \equiv 0\ (\text{mod. } \mu)$$

que μ doit être diviseur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 13 \\ 1, & 0, & -13 \\ 1, & 13, & 13 \end{vmatrix} = 2.\ 11.\ 13\,;$$

par conséquent le nombre μ ne peut avoir que les huit valeurs 1, 11, 13, 143, 2, 22, 26 et 286. Or les valeurs paires de μ sont immédiatement exclues de la manière suivante. Si μ est pair, on déduit des équations (a) et (b) que p est pair et q impair. D'ailleurs en combinant par soustraction ces deux équations, on trouve la formule

$$\mu\ (x^2 - y^2) = 4q\ (13q - p),$$

dont le premier membre est multiple de 16, puisque μ est de la forme $4l + 2$, et que le produit $\mu\,(x^2 - y^2)$ doit être divisible par 4; le second membre au contraire est de la forme $8l + 4$, parce que p est pair, tandis que q est impair. Les deux valeurs 11 et 13 sont aussi exclues par les équations (a) et (b) qui exigent que μ soit résidu quadratique de chacun des deux nombres 11 et 13. Il ne reste ainsi pour μ que les deux valeurs 1 et 143.

3. Or les solutions (x, y) de l'équation proposée, qui correspondent à la valeur $\mu = 143$, sont les mêmes qui correspondent à la valeur $\mu = 1$. Soit en effet $\mu = 143$. L'équation (a) exige que $p - 2q$ soit divisible par 11 ; posons donc $p - 2q = 11p_1$; les formules (a), (b) deviennent

$$13x^2 = 11p_1^2 + 2q^2,\ 13y^2 = 13p_1^2 - 2\,(p_1 - q)^2.$$

Comme $(p_1 - q)$ doit être multiple de 13, nous prenons $q = p_1 - 23q_1$ et nos deux formules se ramènent aux suivantes

$$x^2 = p_1^2 - 4p_1q_1 + 26q_1^2, \quad y^2 = p_1^2 - 26q_1^2.$$

Le système de ces deux équations est identiquement le même que celui qu'on déduit immédiatement des formules (a) et (b) en y faisant $\mu = 1$. Par conséquent toutes les valeurs de x et de y propres à vérifier l'équation proposée peuvent se déduire du système unique

$$(3) \qquad x^2 = (p - 2q)^2 + 22q^2, \; y^2 = p^2 - 26q^2.$$

Dans ces deux équations p, x et y sont impairs; de plus les deux nombres $+26$ et -26 étant résidus quadratiques de p, tous les diviseurs de ce dernier nombre doivent être de la forme $4l+1$. Enfin l'équation

$$p^2 - y^2 = 26q^2$$

exige que le nombre q soit pair, de sorte qu'elle se décompose de la manière suivante:

$$q = 2mn, \; p \pm y = 2m^2 \text{ ou } 26m^2, \; p \mp y = 52n^2 \text{ ou } 4n^2,$$

$$1^\circ \quad p = m^2 + 26n^2, \; \pm y = m^2 - 26n^2,$$

$$2^\circ \quad p = 13m^2 + 2n^2, \; \pm y = 13m^2 - 2n^2.$$

Comme p est de la forme $4l+1$, le nombre n doit être pair.

De son côté, la première des équations (3) se décompose au moyen des formules suivantes:

$$q = 2fg, \; x \pm (p - 4fg) = 2f^2, \; 22f^2, \; x \mp (p - 4fg) = 44g^2, \; 4g^2,$$

$$1^\circ \quad x = f^2 + 22g^2, \; \pm p = f^2 + 4fg - 22g^2,$$

$$2^\circ \quad x = 11f^2 + 2g^2, \; \pm p = 11f^2 + 4fg - 2g^2.$$

Le nombre n étant pair, on déduit de l'égalité $fg = mn$ que g doit être aussi pair, ce qui exclut le signe inférieur dans la première expression de p et le signe supérieur dans la seconde. En égalant ces expressions de p aux deux précédentes, on obtient quatre combinaisons

$$f^2 + 4fg - 22g^2 = m^2 + 26n^2 \text{ ou } 13m^2 + 2n^2,$$

$$-11f^2 + 4fg + 2g^2 = m^2 + 26n^2 \text{ ou } 13m^2 + 2n^2.$$

On doit exclure la deuxième combinaison et la troisième, parce que, en vertu des identités

$$f^2 + 4fg - 22g^2 = (f + 2g)^2 - 26g^2, \quad -11f^2 + 4fg + 2g^2 = -13f^2 + 2(f+g)^2,$$

on en déduirait que 2 est résidu quadratique de 13, ce qui n'est pas. Il ne reste ainsi que les deux combinaisons

$$\text{(A)} \qquad fg = mn, \quad f^2 + 4fg - 22g^2 = m^2 + 26n^2,$$
$$x = f^2 + 22g^2, \quad \pm y = m^2 - 26n^2;$$
$$\text{(B)} \qquad fg = mn, \quad -11f^2 + 4fg + 2g^2 = 13m^2 + 2n^2,$$
$$x = 11f^2 + 2g^2, \quad \pm y = 13m^2 - 2n^2.$$

4. Toutes les valeurs de x et de y propres à vérifier les équations (3) sont renfermées dans les deux systèmes (A) et (B). L'équation $fg = mn$, qui fait partie des deux systèmes, est complètement résolue par les formules

$$m = \lambda\mu, \quad n = hk, \quad f = \lambda h, \quad g = \mu k$$

où l'on désigne par λ, μ, h, k des nombres entiers, premiers entre eux deux à deux. Comme les deux nombres f, m sont impairs, tandis que g et n sont pairs, λ, μ et h sont impairs et k, pair. En substituant ces expressions dans le système (A), on trouve

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} x = \lambda^2 h^2 + 22\mu^2 k^2, \quad \pm y = \lambda^2\mu^2 - 26h^2k^2, \\ k^2(26h^2 + 22\mu^2) - 4\lambda\mu hk + \lambda^2(\mu^2 - h^2) = 0. \end{array} \right.$$

La même substitution remplace les formules (B) par les suivantes :

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} x = 11\lambda^2 h^2 + 2\mu^2 k^2, \quad \pm y = 13\lambda^2\mu^2 - 2h^2k^2, \\ \lambda^2(13\mu^2 + 11h^2) - 4\lambda\mu hk + 2k^2(h^2 - \mu^2) = 0. \end{array} \right.$$

Le nombre k étant pair, x est de la forme $8l + 1$ dans les formules (4) et de la forme $8l + 3$ dans les formules (5). En résolvant la dernière équation du système (4) par rapport au quotient $k : \lambda$, et la dernière équation du système (5) par rapport au quotient inverse $\lambda : k$, on reconnaît que les deux nombres μ, h satisfont à l'équation proposée, de sorte que la solution considérée (x, y) se trouve exprimée au moyen d'une autre solution en nombres moindres. Il n'y a d'exception que pour la solution irréductible (1, 1, 1); car si l'on suppose $x = 1$, on doit faire $k = 0$, $h = \lambda = \mu = 1$.

5. Il nous reste à démontrer que les formules (4) et (5) donnent une solution complète de l'équation proposée, c'est-à-dire qu'elles permettent d'obtenir avec certitude toutes les solutions formées de nombres inférieurs à une limite donnée.

D'abord la dernière des équations (5) donne

$$\frac{\lambda}{k}=\frac{2\mu h \pm \sqrt{2(13\mu^4-11h^4)}}{13\mu^2+11h^2},\quad \frac{\mu}{h}=\frac{2\lambda k \pm \sqrt{4k^4-143\lambda^4}}{13\lambda^2-2k^2},$$

et comme ces quotients sont rationnels, il faut que l'on ait

$$13\mu^4-11h^4=2r^2,\quad 4k^4-143\lambda^4=\rho^2,$$

r et ρ désignant deux nombres entiers. On voit par la première de ces deux équations que les valeurs $x=\mu$, $y=h$ satisfont à l'équation proposée, comme nous l'avons annoncé ci-dessus.

De même on déduit de la dernière des équations (4)

$$\frac{k}{\lambda}=\frac{2\mu h \pm \sqrt{2(13h^4-11\mu^4)}}{2(13h^2+11\mu^2)},\quad \frac{h}{\mu}=\frac{2\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4-572k^4}}{26k^2-\lambda^2};$$

on conclut de là, comme précédemment, que les nombres h, μ, λ, k satisfont respectivement aux deux équations

$$13h^4-11\mu^4=2r^2,\quad \lambda^4-572k^4=\rho^2,$$

dans lesquelles r et ρ désignent deux nombres entiers.

6. Ainsi toute solution (x, y) de l'équation proposée, pourvu que le nombre x soit supérieur à 1, s'exprime au moyen d'une solution en nombres moindres de la même équation, par l'un des deux systèmes suivants:

$$\text{I.}\quad \left| \begin{array}{l} x=\lambda^2h^2+22\mu^2k^2,\quad \pm y=\lambda^2\mu^2-26h^2k^2, \\ 13\,h^4-11\mu^4=2r^2,\quad \dfrac{k}{\lambda}=\dfrac{\mu h \pm r}{13h^2+11\mu^2}; \end{array} \right.$$

$$\text{II.}\quad \left| \begin{array}{l} x=11\lambda^2h^2+2\mu^2k^2,\quad \pm y=13\lambda^2\mu^2-2h^2k^2, \\ 13\mu^4-11h^4=2r^2,\quad \dfrac{k}{\lambda}=\dfrac{\mu h \pm r}{h^2-\mu^2}. \end{array} \right.$$

Le nombre k étant pair, le nombre x est de la forme $8l+1$, dans le

système I, et de la forme $8l+3$, dans le système II; de plus l'ambiguité du signe disparaît dans les deux expressions du rapport $k:\lambda$; car le dénominateur étant multiple de 8, on doit prendre au numérateur celui des deux signes qui satisfait à la congruence $h\mu \pm r \equiv 0 \pmod{4}$. Il est même nécessaire de démontrer qu'en déterminant le signe de cette manière, on obtient pour $k:\lambda$ une fraction irréductible dont le numérateur est pair. En effet, en vertu de la formule $2r^2 = 13h^4 - 11\mu^4$, on a dans le système I:

$$(\mu^2 - h^2)(13h^2 + 11\mu^2) = 2(h^2\mu^2 - r^2),$$

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{h\mu \pm r}{13h^2 + 11\mu^2} = \frac{\mu^2 - h^2}{2(h\mu \mp r)}.$$

Or si l'on a $h\mu \pm r \equiv 0 \pmod{4}$, le signe opposé donne pour $h\mu \mp r$ une valeur de la forme $4l+2$, de sorte que le dénominateur $2(h\mu \pm r)$ est de la forme $8l+4$, tandis que le numérateur $\mu^2 - h^2$ est multiple de 8. La fraction irréductible $k:\lambda$ à laquelle se réduit le quotient $(h\mu \pm r):(13h^2 + 11\mu^2)$ a donc un numérateur pair. Une démonstration toute semblable s'applique au système II.

7. En employant les formules précédentes dans un ordre inverse, on déduit d'une solution quelconque de l'équation proposée, deux autres solutions en nombres plus grands, savoir une au moyen de chacun des systèmes I et II. Il faut excepter pourtant la solution irréductible (1, 1, 1), qui ne donne qu'une seule solution nouvelle, parce que le système I reproduit la même solution $x=1$, $y=1$. En faisant $x=1$, $y=1$, on obtient pour le rapport $k:\lambda$ une expression indéterminée $\frac{0}{0}$; mais en recourant à la dernière des formules (5), on trouve $\frac{\lambda}{k} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Les deux autres formules donnent ensuite $x=83$, $y=59$. Cette solution en fournit deux autres, chacune de celles-ci deux autres, et ainsi de suite. Si l'on a soin de ranger les solutions obtenues, suivant l'ordre croissant des valeurs de x, et de les employer dans le même ordre au moyen des formules I et II, on est assuré d'obtenir toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x ne surpasse pas le carré de la valeur que présente cette indéterminée, x, dans la première des solutions non employées. On peut par conséquent déterminer toutes les solutions formées de nombres inférieurs à une limite donnée, avec la certitude de n'en laisser échapper aucune.

4

Soit, en effet, (x, y, z) une solution de l'équation proposée. Si la valeur de x est supérieure à l'unité, cette solution se ramène à une autre solution de la même équation en nombres moindres (h, μ, r) ou (μ, h, r), par l'un des deux systèmes I, II, suivant la forme du nombre x relativement au module 8. Si cette nouvelle solution est elle-même formée de nombres supérieurs á l'unité, elle se ramène de même à une autre solution en nombres moindres, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à la solution irréductible (1, 1, 1). Comme, dans cette suite de solutions, les valeurs de x décroissent rapidement, puisque chacune d'elle est inférieure à la racine carrée de la précédente, on ne saurait manquer d'arriver promptement à la solution (1, 1, 1). Ainsi à partir d'une solution quelconque (x, y, z) de l'équation proposée on peut former une suite de solutions décroissantes, se terminant par la solution irréductible (1, 1, 1) et dans laquelle chaque terme s'exprime au moyen du terme suivant par l'un des systèmes I ou II. L'avant dernier terme de cette suite est toujours la solution (83, 59, 15 551), puisque cette solution est la seule qui se déduise immédiatement de la solution (1, 1, 1).

8. Soit

$$\text{(S)} \qquad (1,\ 1,\ 1),\ (83,\ 59,\ 15551),\ (x_1, y_1, z_1), \dots (x_n, y_n, z_n),\ (x, y, z)$$

cette suite écrite dans un ordre inverse. On peut obtenir successivement tous les termes de cette suite, et par conséquent la solution considérée (x, y, z). Pour cela on calcule au moyen des formules I et II, les deux solutions qui se déduisent de la solution (83, 59, 15551), l'une de ces deux solutions est nécessairement le troisième terme, (x_1, y_1, z_1), de la suite (S); si donc l'on déduit de chacune d'elles les deux solutions qui en dépendent en vertu des formules I et II, on est assuré d'employer le terme (x_1, y_1, z_1) et d'en déduire le terme suivant (x_2, y_2, z_2) de la suite (S). On rangera les quatre nouvelles solutions suivant l'ordre croissant des valeurs de x, puis on les emploiera successivement pour déduire de chacune d'elles les deux solutions qu'elle détermine moyennant les formules I et II. L'une des huit nouvelles solutions sera le terme $(x_3, y_3,)$ de la suite (S). En ordonnant ces solutions suivant l'ordre croissant des valeur de x, en prenant successivement chacune de ces solutions pour en déduire les deux solutions qui en dépendent, et en continuant de la même manière, on obtiendra nécessairement tous les termes de la suite (S) et conséquemment la solution considérée (x, y, z) qui en est le dernier terme. Ainsi en procédant de la ma-

nière indiquée on est assuré d'obtenir une solution quelconque de l'équation proposée.

On voit par l'expression de x dans les formules I, II que la valeur de cette indéterminée croît très rapidement; elle dépasse le carré de la valeur de cette même indéterminée dans la solution précédente. Par conséquent, lorsqu'on a employé comme valeurs des nombres (h, μ) toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x est inférieure à une limite donnée L, on est assuré d'avoir obtenu toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x ne surpasse pas le carré de cette limite. On obtient donc avec certitude toutes les solutions de l'équation proposée en nombres inférieurs à une limite assignée, quelconque; par conséquent les formules I et II donnent une solution complète de cette équation.

II. *Solution de l'équation* $8x^4 - 3y^4 = 5z^2$.

9. La méthode que nous venons d'employer fournit aussi une solution complète de l'équation

$$(1) \qquad 8x^4 - 3y^4 = 5z^2;$$

seulement le nombre des cas à distinguer est beaucoup plus grand, et la discussion plus compliquée. Après avoir mis cette équations sous la forme

$$8(x^4 - y^4) = 4(z^2 - y^4),$$

on la ramène au système suivant

$$\frac{z - y^2}{x^2 - y^2} = \frac{4p}{q}, \quad \frac{z + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2q}{5p},$$

$$(2) \qquad 4px^2 - (4p - q)y^2 - qz = 0, \quad 2qx^2 + (2q - 5p)y^2 - 5pz = 0,$$

dans lequel on désigne par p, q deux nombres entiers, premiers entre eux. On déduit de ces équations les égalités suivantes

$$\frac{x^2}{20p^2 - 10pq + 2q^2} = \frac{y^2}{20p^2 - 2q^2} = \frac{-z}{20p^2 - 16pq + 2q^2},$$

$$(3) \qquad \left|\begin{array}{l} \mu x^2 = 10p^2 - 5pq + q^2, \\ \mu y^2 = 10p^2 - q^2, \\ -\mu z = 10p^2 - 8pq + q^2, \end{array}\right.$$

en désignant par μ le plus grand commun diviseur des seconds membres. Ces équations réduites en congruences suivant le module μ montrent que μ est diviseur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 5, & -5, & 1 \\ 5, & 0, & -1 \\ 5, & -8, & 1 \end{vmatrix} = -30.$$

D'ailleurs en mettant la première des équations (4) sous la forme

$$(3') \qquad 4\mu x^2 = (2q - 5p)^2 + 15p^2,$$

on voit que μ est positif et résidu quadratique de 15; il ne peut donc avoir que l'une des quatre valeurs 1, 6, 10, 15.

10. La valeur $\mu = 1$ donne le système

$$\text{I.} \qquad x^2 = 10p^2 - 5pq + q^2, \; y^2 = 10p^2 - q^2.$$

Si $\mu = 9$, q doit être pair. Posant donc $q = 2q'$, on a

$$3x^2 = 5p^2 - 5pq' + 2q'^2, \; 3y^2 = 5p^2 - 2q'^2.$$

Les deux nombres p, q étant premiers entre eux, aucun d'eux n'est divisible par 3; on a donc par la première formule

$$-1 + pq' + 2 \equiv 0, \; p \equiv -q' \pmod{3}.$$

On peut donc prendre $q' = 3t - p$, et nos formules deviennent

$$x^2 = 4p^2 - 9pt + 6t^2, \; y^2 = (p + 2t)^2 - 20t^2.$$

La substitution $p = u - 4v$, $t = u - 3v$ remplace ces formules par les suivantes

$$x^2 = u^2 - 5uv + 10v^2, \; y^2 = 10v^2 - u^2,$$

qui ne diffèrent du système I que par la notation.

Lorsqu'on suppose $\mu = 10$, on doit prendre $q = 10q'$; les équations (3) deviennent alors

$$\text{II.} \qquad x^2 = p^2 - 5pq + 10q^2, \quad y^2 = p^2 - 10q^2.$$

Enfin, quand $\mu = 15$, on doit prendre $q = 5q'$; en supprimant le facteur 5, on trouve

$$4.3x^2 = 5(2q' - p)^2 + 3p^2,\ 3y^2 = 2p^2 - 5q'^2.$$

En considérant la dernière formule par rapport au module 8, on voit que p doit être pair; d'ailleurs la première formule exige que $(p - 2q')$ soit multiple de 3; on peut donc poser $p = -q' + 3t$, ce qui donne

$$x^2 = 6t^2 - 9tq' + 4q'^2,\ y^2 = 10t^2 - (2t + q')^2.$$

La substitution $q' = u - 4v$, $t = u - 3v$ remplace ces formules par les suivantes

$$x^2 = u^2 - 5uv + 10v^2,\ y^2 = u^2 - 10v^2,$$

qui ne diffèrent des formules II que par la notation. Donc

Toutes les valeurs x *et* y *propres à vérifier l'équation proposée, se déduisent des deux systèmes*

$$\text{I.} \qquad x^2 = 10p^2 - 5pq + q^2,\ y^2 = 10p^2 - q^2,$$

$$\text{II.} \qquad x^2 = 10p^2 - 5pq + q^2,\ y^2 - q^2 = 10p^2.$$

11. Comme les deux nombres x et y sont premiers entre eux, q doit être impair. Quant au nombre p, il est impair dans le premier système et pair dans le deuxième, parce qu'autrement y^2 serait de la forme $8l + 7$.

Pour obtenir avec certitude toutes les solutions de l'équation proposée en nombres inférieurs à une limite donnée, il est nécessaire d'exprimer une solution quelconque, formée de nombres supérieurs à l'unité, au moyen d'une solution de la même équation, en nombres moindres. On ne parvient à exprimer de cette manière les solutions renfermées dans le système I, qu'en faisant subir à ce système une transformation, qui permette d'appliquer à la deuxième équation la décomposition en facteurs rationnels. Pour cela posons

$$p = t + 3s,\ q = 3t + 10s;$$

le système I sera remplacé par le suivant:

$$x^2 = 4t^2 + 25ts + 40s^2,\ y^2 = t^2 - 10s^2.$$

La dernière équation, considérée relativement au module 8, exige que s soit pair. Mais si l'on suppose s de la forme $4l + 2$, la valeur de x^2 est de même forme. Le nombre s doit donc être multiple de 4. Posant donc $s = 4u$ nous trouvons

$$(4). \qquad x^2 = (2t + 25u)^2 + 15u^2, \ y^2 = t^2 - 160u^2.$$

12. Comme les deux nombres t et y sont impairs et premiers entre eux, la décomposition en facteurs de la dernière équation s'effectue de la manière suivante

$$u = mn, \ t + y = 2m^2 \text{ ou } 10m^2, \ t \pm y = 80n^2 \text{ ou } 16n^2;$$

$$(a). \qquad t = m^2 + 40n^2, \ \pm y = m^2 - 40n^2,$$

$$(b). \qquad t = 5m^2 + 8n^2, \ \pm y = 5m^2 - 8n^2.$$

La décomposition en facteurs de la première des équations (4) exige que l'on distingue deux cas, suivant que u est pair ou impair. Dans le dernier cas, on a les formules suivantes:

$$u = fg, \quad x \pm (2t + 25fg) = f^2 \text{ ou } 3f^2,$$

$$x \mp (2t + 25fg) = 15g^2 \text{ ou } 5g^2,$$

$$(c). \qquad 2x = f^2 + 15g^2, \ \pm 2(2t + 25fg) = f^2 - 15g^2,$$

$$(d). \qquad 2x = 6f^2 + 5g^2, \ \pm (4t + 50fg) = 3f^2 - 5g^2.$$

Lorsque le nombre u est pair, on doit d'abord supprimer le facteur 4, après avoir posé $x = 2x'$, $u = 2u'$, ce qui donne la formule

$$x'^2 = (t + 25u')^2 + 15u'^2,$$

dans laquelle u' doit être multiple de 4, parce que si u' était impair, on aurait $x'^2 = 4l + 3$, et si u' était de la forme $4k + 2$, on aurait $x^2 = 8l + 5$.

Posant donc $u' = 4fg$, on aura

$$u = 8fg, \ x' \pm (t + 100fg) = 2f^2, 10f^2, 6f^2, 30f^2,$$

$$x' \mp (t + 100fg) = 120g^2, 24g^2, 40g^2, 8g^2,$$

$$(a') \qquad x' = f^2 + 60g^2, \quad \pm t = f^2 - 100fg - 60g^2,$$

$$(b') \qquad x' = 5f^2 + 20g^2, \quad \pm t = 5f^2 + 100fg - 12g^2,$$

$$(c') \qquad x' = 3f^2 + 20g^2, \quad \pm t = 20g^2 + 100fg - 3f^2,$$

$$(d') \qquad x' = 15f^2 + 4g^2, \quad \pm t = 4g^2 + 190fg - 15f^2.$$

13. Le nombre t doit avoir la même valeur, soit qu'on l'exprime au mo-

yen des nombres m, n, comme dans les formules (a), (b), soit qu'on l'exprime en fonction de f et g, comme dans les autres formules. Mais ce nombre étant résidu quadratique de 5 dans les formules (a), (c), (a'), (d'), tandis qu'il est non-résidu de 5 dans les formules (b), (d), (b') et (c'), les formules (a) ne peuvent s'associer qu'avec les formules (c), (a') et (d'), et les formules (b) avec les formules (d), (b') et (c'). On a donc les combinaisons suivantes :

$$\pm(m^2+40n^2)=\left(\frac{f+25g}{2}\right)^2-160g^2,\ f^2+100fg-60g^2,\ 4g^2+100fg-15f^2,$$

$$\pm(5m^2+8n^2)=5\left(\frac{g+5f}{2}\right)^2-32f^2,\ 5f^2+100fg-12g^2,\ 20g^2+100fg-3f^2.$$

La considération du module 4 exclut les signes inférieurs dans toutes ces formules. De plus on a $u=mn=fg$, pour les formules (c) et (d) et $u=mn=8fg$ pour les formules suivantes. Le nombre n est donc multiple de 8 pour ces dernières formules; nous remplacerons n par $8n$, de manière à n'avoir entre m, n, f, g qu'une seule relation, $mn=fg$. Les solutions de l'équation proposée qui satisfont aux équations (4) seront donc exprimées par le six groupes de formules :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \pm y=m^2-40n^2,\ 2x=f^2+15g^2,\ mn=fg,\\ 4m^2+160n^2=f^2+50fg-15g^2,\end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} \pm y=m^2-2560n^2,\ x=2(f^2+60g^2),\ mn=fg,\\ m^2+2560n^2=f^2+100fg-60g^2,\end{cases}$$

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \pm y=m^2-2560n^2,\ x=2(15f^2+4g^2),\ mn=fg,\\ m^2+2560n^2=4g^2+100fg-15f^2,\end{cases}$$

$$(\delta)\quad \begin{cases} \pm y=5m^2-8n^2,\ 2x=3f^2+5g^2,\ mn=fg,\\ 20m^2+32n^2=5g^2+50fg-3f^2,\end{cases}$$

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} \pm y=5m^2-512n^2,\ x=2(5f^2+12g^2),\ mn=fg,\\ 5m^2+512n^2=5f^2+100fg-12g^2,\end{cases}$$

$$(\eta) \quad \left| \begin{array}{l} \pm y = 5m^2 - 512n^2, \ \ x = 2(3f^2 + 20g^2), \ \ mn = fg, \\ 5m^2 + 512n^2 = 20g^2 + 100fg - 3f^2. \end{array} \right.$$

Il est important de remarquer que les décompositions au moyen desquelles nous avons ramené les équations (1) aux formules présentes, ne deviennent illusoires que dans le cas où l'on a $u = 0$, c'est-à-dire lorsque la solution considérée est $x = 2$, $y = 1$.

Les nombres t et y étant premiers entre eux, le nombre m, dans les formules (a), et le nombre n, dans les formules (b), doivent être premiers avec 5. Le nombre m est donc premier avec 5 dans les trois systèmes (α), (β), (γ), et le nombre n dans les trois autres systèmes.

14. L'équation $mn = fg$ commune à ces divers systèmes est complètement résolue par les formules

$$(5) \qquad f = \lambda\mu, \ \ g = hk, \ \ m = \lambda h, \ \ n = \mu k$$

dans lesquelles λ, μ, h, k désignent quatre nombres entiers, premiers entre eux, deux à deux. Ces quatre nombres sont impairs dans les deux systèmes (α), (δ); le nombre k peut être pair dans les quatre autres systèmes. Les nombres λ, μ, h sont premiers avec 5 dans les systèmes (α), (β), les nombres λ, h, k dans le système (δ), les nombres λ, μ, k dans les systèmes (δ), (η), enfin les nombres h, k, μ dans le système (ϵ).

Moyennant la substitution (5), la solution considérée (x, y) sera exprimée en fonctions de quatre nombres entiers λ, μ, h, k assujétis à vérifier une équation homogène du quatrième degré, dont la résolution dépend ellemême de celle de l'équation proposée. C'est ce que nous allons démontrer successivement pour chacun de nos six groupes de formules.

Dans le système (α) l'équation à résoudre est

$$(6). \qquad h^2(4\lambda^2 - k^2) - 50\lambda\mu hk + 5\mu^2(32k^2 + 3\lambda^2) = 0.$$

On en déduit successivement

$$\frac{h}{\mu} = \frac{25\lambda k \pm 2\sqrt{5(8k^4 - 3\lambda^3)}}{4\lambda^2 - k^2}, \quad \frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm 2\sqrt{h^4 - 600\mu^4}}{160\mu^2 - h^2},$$

d'où l'on conclut que les nombres h, μ, k, λ vérifient respectivement les deux équations

$$h^4 - 600\mu^4 = \tau^2, \ \ 8k^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2$$

dont la dernière est l'équation proposée elle-même. Si cette dernière équation était résolue, on connaitrait tous les systèmes de valeurs des nombres k, λ qui satisfont à l'équation (6), et l'on obtiendrait les valeurs correspondantes des indéterminées h, μ au moyen de la formule

$$\frac{h}{\mu} = \frac{25\lambda k \pm 10\rho}{4\lambda^2 - k^2},$$

en ayant soin de réduire à sa plus simple expression la fraction qui forme le second membre.

Ainsi les solutions de l'équation proposée qui dépendent du système (α), sont exprimées au moyen de solutions en nombres moindres de la même équation, par les formules

$$(7). \quad \left| \begin{array}{l} 2x = \lambda^2\mu^2 + 15h^2k^2, \quad \pm y = \lambda^2 h^2 - 40\mu^2 k^2, \\ 8k^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, \quad \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{25\lambda k - 10\rho}{4\lambda^2 - k^2}. \end{array} \right.$$

Toutes les solutions de l'équation (6) ne sont pas admissibles dans ces formules; on ne peut employer que celles où les nombres k, λ vérifient la congruence $\lambda^2 + k^2 \equiv 0$ (mod. 5), car autrement les nombres h et y seraient divisibles par 5, tandis que y doit être premier avec 5. De plus, k doit être impair.

15. Les solutions (x, y) renfermées dans les formules (δ) dépendent de l'équation biquadratique

$$(8) \qquad 5h^2(4\lambda^2 - k^2) - 50\lambda\mu hk + \mu^2(3\lambda^2 + 32k^2) = 0,$$

d'où l'on déduit les deux formules

$$\frac{h}{\mu} = \frac{25\lambda k \pm 2\sqrt{5(8k^4 - 3\lambda^4)}}{5(4\lambda^2 - k^2)}, \quad \frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm \sqrt{25h^4 - 24\mu^4}}{32\mu^2 - 5h^2}.$$

Pour que les deux fractions $h:\mu$, $k:\lambda$ soient rationnelles, il est nécessaire et suffisant que les nombres h, μ, k, λ vérifient respectivement les deux équations

$$25h^4 - 24\mu^4 = \tau^2, \quad 8k^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2,$$

ρ et τ désignant des nombres entiers. Les solutions renfermées dans le système (δ) se ramènent donc à d'autres solutions de l'équation proposée

en nombres moindre k, λ, au moyen desquelles on les exprime par les formules

$$(9)\quad \left| \begin{array}{ll} 8k^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, & \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{5\lambda k \pm 2\rho}{4\lambda^2 - k^2} \\ 2x = 3\lambda^2\mu^2 + 5h^2k^2, & \pm y = 5\lambda^2h^2 - 8\mu^2k^2. \end{array} \right.$$

On ne peut pas employer dans ces formules les solutions (k, λ) auxquelles correspondent pour μ des valeurs multiples de 5, parce que les nombres x et y ne seraient plus premiers entre eux.

16. Dans les deux systèmes (β) et (γ) on doit résoudre respectivement les deux équations

$$(10)\qquad 20\,(128\mu^2 + 3h^2)\,k^2 - 100\lambda\mu hk + (h^2 - \mu^2)\,\lambda^2 = 0,$$

$$(11)\qquad (\lambda^2 - 4k^2)\,h^2 - 100\lambda\mu hk + 5\,(512k^2 + 3\lambda^2)\,\mu^2 = 0.$$

L'équation (10) se résout au moyen des formules

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm \sqrt{5\,(8\,(2\mu)^4 - 3h^4)}}{10\,(128\mu^2 + 3h^2)}, \quad \frac{h}{\mu} = \frac{50\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 - 600\,(4k)^4}}{\lambda^2 + 60k^2},$$

et l'équation (11) au moyen des suivantes

$$\frac{h}{\mu} = \frac{50\lambda k \pm \sqrt{5\,(8(4k)^4 - 3\lambda^4)}}{\lambda^2 - 4k^2}, \quad \frac{\lambda}{k} = \frac{50h\pi \pm 2\sqrt{h^4 - 600\,(2\mu)^4}}{h^2 + 15\mu^2},$$

On a dans le premier cas

$$8\,(2\mu)^4 - 3h^4 = 4\rho^2, \quad \lambda^4 - 600\,(4k)^4 = \tau^2,$$

et dans le second,

$$8\,(4k)^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, \quad h^4 - 600\,(2\mu)^4 = \tau^2.$$

Dans les deux cas la solution (x, y) de l'équation proposée est ramenée à une autre solution de la même équation, au moyen de laquelle on l'exprime par les formules suivantes :

$$(12)\quad \left| \begin{array}{ll} 8\,(2\mu)^4 - 3h^4 = 5\rho^2, & \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{5h\mu \pm \rho}{2\,(128\mu^2 + 3h^2)} \\ x = 2\,(\lambda^2\mu^2 + 60h^2k^2), & \pm y = \lambda^2h^2 - 2560\mu^2k^2 ; \end{array} \right.$$

$$(13)\quad \left| \begin{array}{ll} 8\,(4k)^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, & \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{5\,(10\lambda k \pm \rho)}{\lambda^2 - 4k^2}, \\ x = 2(15\lambda^2\mu^2 + 4h^2k^2), & \pm y = \lambda^2 h^2 - 2560\mu^2 k^2. \end{array} \right.$$

Dans les formules (12) l'expression $5h\mu \pm \rho$ doit avoir une valeur paire; par conséquent le nombre μ doit être impair; de plus les nombres μ, h doivent vérifier la congruence $\mu^2 - h^2 \equiv 0$ (mod. 5), sans quoi les nombres λ et y seraient multiples de 5. Dans les formules (12), les nombres k, λ doivent vérifier la congruence $k^2 + \lambda^2 \equiv 0$ (mod. 5), parce qn'autrement h et y seraient divisibles par 5.

17. De même les solutions qui se ramènent aux deux systèmes (ε) et (η) s'expriment au moyen de solutions en nombres moindres de l'équation proposée. Les deux équations dont elles dépendent, savoir

$$(14)\qquad 4\,(128\mu^2 + 3h^2)k^2 - 100\lambda\mu hk + 5\,(h^2 - \mu^2)\,\lambda^2 = 0,$$

$$(15)\qquad 5\,(\lambda^2 - 4k^2)h^2 - 100\lambda\mu hk + (512k^2 + 3\lambda^2)\,\mu^2 = 0,$$

se résolvent respectivement au moyen des formules

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm \sqrt{5\,(8(2\mu)^4 - 3h^4)}}{2\,(128\mu^2 + 3h^2)}, \quad \frac{h}{\mu} = \frac{50\lambda k \pm \sqrt{25\lambda^4 - 24\,(4k)^4}}{5\lambda^2 + 12k^2};$$

$$\frac{h}{\mu} = \frac{50\lambda k \pm \sqrt{5(8(4k)^4 - 3\lambda^4)}}{5\,(\lambda^2 - 4k^2)}, \quad \frac{\lambda}{k} = \frac{50h\mu \mp 2\sqrt{25h^4 - 24\,(2\mu)^4}}{5h^2 + 3\mu^2}.$$

Les nombres 2μ, h, dans le premier cas; et les nombres $4k$, λ, dans le deuxième, forment une solution de l'équation proposée. Dans les deux cas, la solution considérée (x, y) se trouve exprimée au moyen d'une autre solution de l'équation proposée, par les formules respectives :

$$(16)\quad \left| \begin{array}{ll} 8\,(2\mu)^4 - 8h^4 = 5\rho^2, & \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{25h\mu \pm 5\rho}{2(128\mu^2 + 3h^2)}, \\ x = 2\,(5\lambda^2\mu^2 + 12h^2k^2), & \pm y = \lambda^2 h^2 - 512\mu^2 k^2; \end{array} \right.$$

$$(17)\quad \left| \begin{array}{ll} 8\,(4k)^4 - 3\lambda^4 = 5\rho^2, & \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{10\lambda k \pm \rho}{\lambda^2 - 4k^2}, \\ x = 2\,(3\lambda^2\mu^2 + 20h^2k^2), & \pm y = 5\lambda^2 h^2 - 512\mu^2 k^2. \end{array} \right.$$

Le nombre μ doit être impair dans les formules (16) pour la même raison que dans les formules (12); mais, tandis que dans les formules (12) les nombres h, μ doivent vérifier la congruence $h^2 - \mu^2 \equiv 0 \pmod{5}$, dans les formules (16) ils doivent satisfaire à la congruence $h^2 + \mu^2 \equiv 0 \pmod{5}$. Dans les formules (17), les trois nombres λ, μ et k doivent être premiers avec 5.

18. Il résulte de l'analyse précédente que toutes les solutions de l'équation proposée dans lesquelles la valeur de x est paire, pourvu que cette valeur soit supérieure à 2, se ramènent à des solutions de la même équation en nombres moindres, au moyen desquelles on les exprime par les formules obtenues dans les quatre derniers numéros. Nous allons démontrer qu'il en est de même pour les solutions dans lesquelles la valeur de x est impaire, pourvu que cette valeur soit supérieure à l'unité. Nous avons trouvé précédemment (n° 11) que ces solutions sont exprimées par les formules

$$x^2 = 10p^2 - 5\,pq + q^2,\ y^2 = q^2 - 10\,p^2,$$

où q désigne un nombre impair et p un nombre pair. Or, si p est de la forme $4l+2$, x^2 est de la forme $4l+3$; si p est de la forme $8l+4$, x^2 est de la forme $8l+5$. Le nombre p doit donc être multiple de 8; c'est pourquoi, remplaçant p par $8p$, nous avons à résoudre le système des deux équations

$$\text{II.} \qquad x^2 = (q - 20p)^2 + 240p^2,\ y^2 = q^2 - 640\,p^2.$$

Comme les deux nombres q et y sont impairs et premiers entre eux, les deux facteurs $q+y$ et $q-y$ ont pour plus grand diviseur commun le nombre 2, de sorte que la décomposition de la dernière équation s'effectue de la manière suivante :

$$p = mn,\ q \pm y = 2m^2,\ 10m^2,\ q \mp y = 320\,n^2,\ 64n^2$$

$$(a) \qquad q = m^2 + 160n^2,\ \ \pm y = m^2 - 160\,n^2$$

$$(b) \qquad q = 5m^2 + 32n^2,\ \ \pm y = 5m^2 - 32\,n^2.$$

19. De même la première équation du système II se décompose en facteurs, au moyen des formules suivantes :

$$p = fg, \quad x \pm (q - 20p) = 2f^2,\ 6f^2,\ 10f^2,\ 30f^2,$$

$$x \mp (q - 20p) = 120g^2,\ 40g^2,\ 24g^2,\ 8g^2,$$

$$\pm (q - 20fg) = f^2 - 60g^2,\ 3f^2 - 20g^2,\ 5f^2 - 12g^2,\ 15f^2 - 4g^2.$$

La première et la derniére hypothèse, dans lesquelles q est résidu quadratique de (5) ne peuvent s'accorder qu'avec les formules (a); de même les deux autres hypothèses, dans lesquelles q est non-résidu quadratique de 5, ne peuvent s'associer qu'avec les formules (b). On a donc

$$m^2 + 160n^2 = \pm (f^2 + 20fg - 60g^2), \pm (4g^2 + 20fg - 15f^2),$$

$$5m^2 + 32n^2 = \pm (20g^2 + 20fg - 3f^2), \pm (5f^2 + 20fg - 12g^2).$$

Dans toutes ces formules, le signe inférieur est exclu par la considération du module (4). Le système des équations II est donc résolu au moyen des quatre systèmes suivants :

$$(\alpha) \left| \begin{array}{l} x = f^2 + 60g^2, \quad \pm y = m^2 - 160n^2, \\ fg = mn, \quad m^2 + 160n^2 = f^2 + 20fg - 60g^2, \end{array} \right.$$

$$(\beta) \left| \begin{array}{l} x = 15f^2 + 4g^2, \quad \pm y = m^2 - 160n^2, \\ fg = mn, \quad m^2 + 160n^2 = 4g^2 + 20fg - 15f^2, \end{array} \right.$$

$$(\gamma) \left| \begin{array}{l} x = 5f^2 + 12g^2, \quad \pm y = 5m^2 - 32n^2, \\ fg = mn, \quad 5m^2 + 32n^2 = 5f^2 + 20fg - 12g^2, \end{array} \right.$$

$$(\delta) \left| \begin{array}{l} x = 3f^2 + 20g^2, \quad \pm y - 5m^2 - 32n^2, \\ fg = mn, \quad 5m^2 + 32n^2 = 20g^2 + 30fg - 3f^2. \end{array} \right.$$

20. Comme dans le cas précédent, l'équation $fg = mn$ comune à ces quatre systèmes est résolue complètement par les formules

$$(5) \qquad f = \lambda\mu, \ g = hk, \ m = \lambda h, \ n = \mu k,$$

dans lesquelles λ, μ, h, k désignent quatre nombres entiers et premiers entre eux, deux à deux, dont les trois premiers sont impairs et dont le quatrième, k, peut être pair ou impair. Les formules (5) ramènent la ré-

solution des systèmes précédents à celle d'une seule équation biquadratique. Dans le système (α) cette équation biquadratique est

$$(18) \qquad 20\,(8\mu^2 + 3h^2)\,k^2 - 29\lambda h\mu k + (h^2 - \mu^2)\,\lambda^2 = 6\,;$$

on en déduit

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{5h\mu \pm \sqrt{5\,(8\mu^4 - 3h^4)}}{10\,(8\mu^2 + 3h^2)}, \quad \frac{\mu}{h} = \frac{10\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 - 600\,(2k)^4}}{160k^2 - \lambda^2},$$

et comme les rapports $k:\lambda$, $\mu:h$ sont rationnels, les nombres μ, h, k, λ doivent vérifier les deux équations

$$8\mu^4 - 3h^4 = 5\rho^2, \quad \lambda^4 - 600(2k)^4 = \tau^2,$$

dans lesquelles on désigne par ρ et τ deux nombres entiers. Il résulte de là que les solutions renfermées dans le système (α) sont exprimées au moyen de solutions en nombres moindres de l'équation proposée, par les formules

$$(19). \quad \left|\begin{array}{l} 8\mu^4 - 3h^4 = 5\rho^2, \quad \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{h\mu \pm \rho}{2(8\mu^2 + 3h^2)} \\[2ex] x = \lambda^2\mu^2 + 60h^2k^2, \ \pm y = \lambda^2h^2 - 160\mu^2k^2. \end{array}\right.$$

Comme les nombres λ, μ, h doivent être premiers avec 5, on ne peut admettre dans ces formules que les solutions $x = \mu$, $y = h$ qui vérifient la congruence $\mu^2 - h^2 \equiv 0$ (mod. 5); car en résolvant l'équation (18) par rapport au quotient $\lambda : k$, on trouve

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{10\,(h\mu \pm \rho)}{h^2 - \mu^2}.$$

Cette expression montre que λ serait multiple de 5 si le dénominateur $h^2 - \mu^2$ n'était pas divisible par 5..

21. Dans le système (γ) la transformation (5) remplace la dernière équation par la suivante

$$(20) \qquad 4\,(8\mu^2 + 3h^2)\,k^2 - 20\lambda\mu hk + 5\,(h^2 - \mu^2)\,\lambda^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{k}{\lambda}=\frac{5h\mu\pm\sqrt{5\,(8\mu^4-3h^4)}}{2(8\mu^2+2\rho^2)},\quad \frac{h}{\mu}=\frac{19\lambda k\pm\sqrt{25\lambda^4-24\,(2k)^4}}{32k^2-5\lambda^2},$$

$$8\mu^4-3h^4=5\rho^2,\quad 25\lambda^4-24\,(2k)^4=\tau^2.$$

Les deux nombres μ, h forment donc une solution de l'équation proposée, et la solution considérée (x, y) s'exprime au moyen de cette solution (μ, h) par les formules

$$(21)\quad \left|\begin{array}{l} 8\mu^4-3h^4=5\rho^2,\quad \dfrac{k}{\lambda}=\dfrac{5(h\mu\pm\rho)}{16\mu^2+6\mu^2} \\ x=5\lambda^2\mu^2+12h^2k^2,\quad \pm y=5\lambda^2h^2-32\mu^2k^2. \end{array}\right.$$

Le nombre k doit être premier avec 5, sans quoi x et y seraient divisibles par 5. On ne peut donc employer dans ces formules que les solutions (μ, h) qui rendent la somme μ^2+h^2 divisible per 5. De plus le nombre μ doit être impair, puisque l'on suppose x impair.

22. En vertu de la même transformation (5), les deux systèmes (β) et (δ) dépendent respectivement des deux équations biquadratiques

$$(22)\quad (\lambda^2-4k^2(\,h^2-20\lambda\mu hk+5\,(32k^2+3\lambda^2)\,\mu^2=0,$$

$$(23)\quad 5(\lambda^2-4k^2)h^2-20\lambda\mu hk+(32k^2+3\lambda^2)\,\mu^2=0.$$

On en déduit respectivement les deux formules

$$\frac{h}{\mu}=\frac{10\lambda k\pm\sqrt{5\,(8(2k)^4-3\lambda^4)}}{\lambda^2-4k^2},\quad \frac{h}{\mu}=\frac{10\lambda k\pm\sqrt{5\,(8\,(2k)^4-3\lambda^4)}}{5\,(\lambda^2-4k^2)},$$

où l'on voit que les nombres $2k$, λ forment une solution de l'équation proposée. Ainsi la solution considérée (x, y) est exprimée au moyen d'une solution de la même équation en nombres moindres $(2k, \lambda)$, par les formules

$$(24)\quad \left|\begin{array}{l} 8\,(2k)^4-3\lambda^4=5\rho^2\quad \dfrac{h}{\mu}=\dfrac{5\,(2\lambda k\pm\rho)}{\lambda^2-4k^2} \\ x=15\lambda^2\mu^2+4h^2k^2,\quad y=\lambda^2h^2-160\mu^2k^2\,; \end{array}\right.$$

$$(25)\quad \left|\begin{array}{l} 8\,(2k)^4-3\lambda^4=5\rho^2\quad \dfrac{h}{\mu}=\dfrac{2\lambda k\pm\rho}{\lambda^2-4k^2}, \\ x=3\lambda^2\mu^2+20h^2k^2,\quad \pm y=5\lambda^2h^2-32\mu^2k^2. \end{array}\right.$$

Le nombre h doit être premier avec 5 dans les formules (24) et le nombre μ, dans les formules (25). Le dénominateur $\lambda^2 - 4k^2$ doit donc être divisible par 5 dans les formnles (24) et premier avec 5 dans les formules (25).

On voit par l'analyse précédente qu'une solution quelconque de l'équation proposée, pourvu qu'elle soit formée de nombres supérieurs à l'unité, se ramène à une autre solution de la même équation en nombres moindres, au moyen de laquelle on l'exprime, suivant la forme des valeurs de x et de y relativement au module 8, par l'un des dix systèmes de formules que nous avons obtenus, savoir par l'un des six premiers, quand x est pair, et par l'un des quatre derniers, quand x est impair. Il résulte de là que nos formules donnent une solution complète de l'équation proposée; mais avant d'aborder cette démonstration, nous dirons quelques mots de la méthode posthume d'Euler pour trouver les valeurs rationnelles de x qui rendent rationnelle la racine carrée d'un polynome du quatrième degré en x.

23. La solution complète de l'une des équations biquadratiques (6) (8), (18) ou (20) suffirait pour faire connaître toutes les solutions de l'équation proposée. Considérons par exemple l'équation

$$(6) \qquad h^2 (4\lambda^2 - k^2) - 50\, \lambda\mu hk + 5\,(32k^2 + 3\lambda^2)\, \mu^2 = 0,$$

avec les expressions qui s'en déduisent pour les deux rapports $h:\mu$, $k:\lambda$, savoir

$$\frac{h}{\mu} = \frac{25\lambda k \pm 2\sqrt{5\,(8k^4 - 3\lambda^4)}}{4\lambda^2 - k^2}, \quad \frac{k}{\lambda} = \frac{25h\mu \pm 2\sqrt{h^4 - 600\,\mu^4}}{160\mu^2 - h^2}.$$

On voit par l'expression du rapport $h:\mu$ que toute solution $(x = k,\ y = \lambda)$ de l'équation proposée détermine deux systèmes de valeurs des nombres h, μ propres à vérifier l'équation (6), lorsqu'on les associe aux valeurs considérées des nombres k, λ. Si donc l'on connaissait tous les systèmes de valeurs des nombres k, λ, h, μ qui satisfont à l'équation (6), en prenant dans tous ces systèmes $x = k, y = \lambda$, on obtiendrait toutes les solutions de l'équation proposée.

Proposons-nous de résoudre l'équation (6) par la méthode posthume d'Euler, dont j'ai parlé avec détail dans mon *Étude sur l'équation indéterminée* $ax^4 + by^4 = cz^2$ (Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei, Sess. VII, 1883). Pour cela transformons l'équation (6) en posant

$$\frac{k}{\lambda} = \xi, \quad \frac{h}{\mu} = \zeta,$$

ce qui donne l'équation

$$(6') \qquad (4 - \xi^2)\, \zeta^2 - 50\xi\zeta + 5\,(32\xi^2 + 3) = 0.$$

En désignant par ζ, ζ' les deux valeurs de ζ qui correspondent à une même valeur de ξ, par ξ, ξ' les deux valeurs de ξ qui correspondent à une même valeur de ζ, on obtient les deux formules

$$(a) \qquad \zeta + \zeta' = \frac{50\xi}{4 - \xi^2}, \qquad (b) \qquad \xi + \xi' = \frac{50\zeta}{160 - \zeta^2},$$

dont l'emploi alternatif constitue la méthode posthume d'Euler.

Les solutions qu'Euler appelle primitives se réduisent ici à deux, savoir $\xi = 2$, $\xi = -2$. Si l'on fait $\xi = 2$, on déduit de l'équation (6'), $\zeta = \frac{131}{20}$; la seconde valeur de ζ est infinie. Les deux valeurs correspondantes $\xi = 2$, $\zeta = \frac{131}{20}$ ne peuvent s'employer que dans la formule (b), d'où l'on déduit pour ξ une nouvelle valeur $\xi' = \frac{37332}{46839}$. En substituant cette dernière valeur dans la formule (a), ainsi que la valeur correspondante $\zeta = \frac{131}{20}$ on en déduit

$$\zeta' + \frac{131}{20} = \frac{3\,497187096}{135232839}, \qquad \zeta' = \frac{5\,2228240011}{2704656781}.$$

En associant dans la formule (b) cette valeur de ζ avec la dernière valeur de ξ, on obtient une nouvelle valeur de cette indéterminée, et ainsi de suite. On obtient de la sorte une suite indéfinie

$$\zeta = \frac{1}{0}, \; \xi = 2, \; \zeta' = \frac{131}{20}, \; \xi' = \frac{37332}{46839}, \; \zeta'' = \frac{52228240011}{2704656780}, \ldots$$

dans laquelle chaque valeur de ξ est comprise entre les deux seules valeurs de ζ qu'on puisse lui associer de manière à vérifier l'équation (6'). La solution $\xi = -2$ donnerait une autre suite qui ne diffère de la précédente que par les signes des valeurs de ξ et de ζ. La solution $\xi = 1$, rendue évidente par l'équation proposée, ne figure pas parmi les solutions que l'on peut déduire par la méthode présente des solutions qu'Euler appelle primitives.

14. Si l'on fait $\xi = 1$ dans l'équation (6') on trouve pour ζ deux valeurs rationnelles $\frac{5}{1}$, $\frac{35}{3}$. En associant successivement dans la formule (b) les deux valeurs $\xi = 1$, $\zeta = 5$, puis $\xi = 1$, $\zeta = \frac{35}{3}$ on obtient deux nouvelles valeurs

de ξ; savoir $\xi' = \frac{33}{27}$ et $\xi = \frac{1007}{43}$. La formule (a) donne ensuite pour ζ les deux valeurs

$$\zeta'' = \frac{19115}{2387}, \quad {}''\zeta = -\frac{4636445}{335551},$$

et en continuant l'emploi alternatif des formules (b) et (a), on forme une suite indéfinie dans les deux sens

$$\ldots{}''\zeta = -\frac{4\,636445}{335551}, \quad {}'\xi = \frac{1007}{43}, \quad {}'\zeta = \frac{35}{5}, \quad \xi = 1,$$

$$\zeta' = \frac{5}{1}, \quad \xi' = \frac{23}{27}, \quad \zeta'' = \frac{19115}{2387}, \ldots$$

Dans cette suite, comme dans celle du n.° précédent, chaque valeur de ξ est comprise entre les deux seules valeurs de ζ qu'on puisse lui associer de manière à vérifier l'équation ($6'$). Chacune de ces valeurs de ξ détermine une solution de l'équation proposée qu'on obtient en égalant x et y aux deux termes de cette valeur réduite à sa plus simple expression. Mais cette suite ne donne pas toutes les solutions en nombres impairs, pas plus que la suite précédente ne fait connaitre toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x est paire. L'équation proposée admet la solution

$$x = 107, \quad y = 83, \quad z = 13463,$$

qui correspond à la solution $\xi = \frac{107}{83}$ de l'équation ($6'$), solution qui ne figure dans aucunes des deux suites précédentes. A cette valeur de ξ l'équation ($6'$) fait correspondre les deux valeurs

$$\zeta = \frac{155}{7}, \quad \zeta = \frac{12485}{2301}.$$

En associant successivement dans la formule (b) ces deux valeurs de ζ à la valeur correspondante de ξ, savoir $\xi = \frac{107}{83}$, on obtient deux nouvelles valeurs de ξ, $-\frac{181}{39}$ et $\frac{1313869}{1665689}$.

Ainsi la solution $\xi = 107 : 83$ est la base d'une suite analogue à la précédente et indéfinie dans les deux sens. Les valeurs de ξ qui figurent dans cette suite correspondent à des solutions de l'équation proposée dans les-

quelles la valeur de x est impaire; la valeur $\xi = -181 : 39$ correspond à la solution

$$x = 181, \quad y = 39, \quad z = 41423.$$

25. Ainsi l'emploi de la méthode posthume d'Euler pour trouver les valeurs rationnelles de ξ qui rendent rationnelle l'expression $\sqrt{40\xi^4 - 15}$ ne donne qu'une solution incomplète, parce que cette méthode ne fournit aucun moyen de trouver avec certitude les solutions qui servent de bases à des suites indéfinies, semblables aux précédentes.

Au contraire les formules auxquelles nous sommes parvenus dans ce Mémoire donnent une solution complète de l'équation proposée. Quelle que soit en effet la solution (x, y, z) de cette équation, pourvu que la valeur de x soit supérieure à 2, elle suppose une autre solution de la même équation en nombres moindres, au moyen de laquelle on l'exprime par l'un des systèmes précédents. Si dans cette dernière solution la valeur de x est encore supérieure à 2, elle suppose une autre solution de la même équation en nombres moindres, au moyen de laquelle on l'exprime par l'un des mêmes systèmes de formules, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à une solution où la valeur de x ne surpasse pas 2. Dailleurs si l'on fait $x = 1$, on doit prendre $y = z = 1$; si l'on fait $x = 2$, on ne peut vérifier l'équation proposée qu'en prenant $y = 1$, $z = 5$. Par conséquent l'équation proposée n'admet que deux solutions irréductibles, savoir (1, 1, 1) et (2, 1, 5).

Toute autre solution (x, y, z) donne lieu à une suite de solutions en nombres décroissants, commençant par la solution considérée, finissant par l'une des deux solutions (1, 1, 1) ou (2, 1, 5) et telles que chacun de ses termes s'exprime au moyen du suivant par l'un de nos dix systèmes de formules.

26. Supposons que la suite dont nous venons de parler ait pour dernier terme la solution (1, 1, 1). Il suffit d'employer les mêmes formules dans un ordre inverse, en partant de la solution (1, 1, 1), pour obtenir successivement tous les termes de cette suite. Il est vrai que la solution (1, 1, 1) fournit plusieurs solutions et qu'on ignore quelle est celle de ces solutions qui est l'avant dernier terme de notre suite; mais si l'on emploie toutes les solutions obtenues afin d'en déduire toutes les solutions qui en dépendent en vertu de nos formules, nous sommes assurés d'avoir employé l'avant dernier terme de notre suite et d'avoir obtenu le terme qui le précède. On rangera suivant l'ordre croissant des valeurs de x toutes les solutions calculées, et on les emploiera successivement pour en déduire toutes

les solutions qu'elles peuvent fournir au moyen de nos formules. En continuant de la même manière, on obtiendra tous les termes de la suite considérée et, conséquemment, la solution demandée (x, y, z) qui en est le dernier terme. Ces solutions sont accompagnées d'un grand nombre d'autres, étrangères à notre suite; mais toutes ces solutions se ramènent par nos formules à la même solution primitive (1, 1, 1) au moyen d'une suite semblable à la suite considérée. Si l'on désigne par L la plus petite valeur de x dans les solutions non encore employées, nous sommes assurés d'avoir obtenu toutes les solutions qui se ramènent à la solution (1, 1, 1) et dans lesquelles la valeur de x ne surpasse pas L^2.

La solution (1, 1, 1) ne peut s'employer que dans les formules (7), (9), (19) et (21), parce que les autres formules supposent que la première indéterminée est un nombre pair. De plus on doit exclure les deux systèmes (7) et (21), parce que les valeurs $h = \mu = 1$ ne satisfont pas à la condition $h^2 + \mu^2 \equiv 0$ (mod. 5). Il ne reste ainsi que les deux systèmes (9) et (19).

En faisant $k = \lambda = 1$ dans les formules (9), on trouve

$$\frac{h}{\mu} = \frac{5 \pm 2}{3} = \frac{1}{1}, \frac{7}{3}.$$

La combinaison $\lambda = k = 1$, $h = \mu = 1$ donne $x = 4$, $y = 3$, $z = 19$; la combinaison $\lambda = k = 1$, $h = 7$. $\mu = 3$ donne $x = 136$, $y = 173$, $z = 3149$.

Pour employer la même solution (1, 1, 1) dans les formules (19), il faut faire $h = \mu = 1$, ce qui donne

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{1 \pm 1}{22} = \frac{0}{1}, \frac{1}{11}.$$

La combinaison $k = 0$, $\lambda = 1$, $h = \mu = 1$ donne $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. La combinaison $h = \mu = 1$, $k = 1$, $\lambda = 11$ donne la solution $x = 181$, $y = 39$, $z = 41423$.

Ainsi la solution (1, 1, 1) en détermine trois autres

(4, 3, 19), (136, 173, 3149), (181, 39, 31423).

L'une de ces trois solutions est le second terme de la suite considérée, écrite dans un ordre inverse

(S) $\quad (1, 1, 1), (x_1, y_1, z_1), \ldots (x_n, y_n, z_n), (x, y, z).$

Si nous les employons toutes trois dans nos formules, nous sommes assurés d'employer le terme (x_1, y_1, z_1) et d'obtenir le terme suivant (x_2, y_2, z_2).

27. La solution (4, 3, 19) ne peut s'employer que dans les deux sytèmes (13) et (25). Dans les formules (13) on doit prendre $k = 1$, $\lambda = 3$, $\rho = 19$; on

en déduit $\frac{h}{\mu} = \frac{11}{1}, \frac{49}{1}$. La combinaison $k = 1$, $\lambda = 3$, $h = 11$, $\mu = 1$ donne $x = 1238$, $y = 1471$, $z = 974203$; l'autre combinaison, $k = 1$, $\lambda = 3$, $h = 49$, $\mu = 1$ donne $x = 19478$, $y = 19049$.

Dans les formules (25) on doit faire $k = 2$, $\lambda = 3$, ce qui donne pour le rapport $h : \mu$ les deux valeurs $\frac{1}{1}$, $\frac{-31}{7}$. En combinant successivement ces deux valeurs avec $k = 2$, $\lambda = 3$, on obtient les deux solutions

$$x = 107, \quad y = 83, \quad z = 13463 ;$$
$$x = 78203, \quad y = 36973.$$

Ainsi la solution (4, 3, 19) en détermine quatre nouvelles au moyen de nos formules. Si cette solution est le second terme de la suite (S), l'une des quatre solutions obtenues en est le troisième terme.

On a en tout huit solutions de l'équation proposée, en employant seulement les deux solutions (1, 1, 1), (4, 3, 19). Celle des solution non encore employée où la valeur de x est la plus petite est (107, 83, 13463); elle ne peut donner que des solutions dans lesquelles la valeur de x est supérieure au carré de 107. Par conséquent toutes les solutions dans lesquelles la valeur de x est inférieure à 10000 et qui dépendent de la solution primitive (1, 1, 1) s'obtiennent par l'emploi des deux solutions (1, 1, 1), (4, 3, 19). Elles sont au nombre de six, savoir

(1, 1, 1), (4, 3, 19), (107, 83, 13463), (136, 173, 3149),
(181, 39, 41423), (1238, 1471, 974203).

Il reste à chercher les solutions qui dépendent de la solution primitive (2, 1, 5). Cette solution ne peut s'employer que dans les formules (12) et (25), au moyen desquelles elle fournit trois nouvelles solutions

(23, 37, 359), (1007, 43, 1282681), (54442, 46839, z).

La solution (23, 27, 359) ne peut s'employer que dans les formules (9) et (19). On en déduit quatre solutions nouvelles dont une seule présente une valeur de x inférieure à 10000, savoir

$$x = 2416, \quad y = 587, \quad z = 7378531.$$

Ainsi l'équation proposée admet dix solutions en nombres entiers et positifs, dans lesquelles la valeur de x est inférieure à 10000, et nous sommes assurés qu'il n'existe aucune autre solution au dessous de la limite énoncée.

COMUNICAZIONI

Castracane, Conte Ab. F. – *Sopra il vegetare delle Diatomee in fondo al mare*:

Il Conte Ab. Francesco Castracane facendo seguito alla prima comunicazione presentata alla Accademia sopra il vegetare delle Diatomee in fondo al mare, dal qual fatto seguirebbe che si dovesse riconoscere l'azione della luce in quelli abissi; notò come un fatto di tanta importanza non fosse appoggiato se non ad una osservazione. Perciò a stabilire con più certezza la cosa, si è procacciato dalla Commissione del Challenger i contenuti di sei oloturie pescate in diversi luoghi ed a profondità di 2511 a 5274 metri. Il risultato già ottenuto su i due echini provenienti dalla profondità di 2638 metri fu perfettamente conforme a quello delle sei oloturie, le quali egualmente che gli echini hanno soltanto un moto di reptazione e perciò non poterono sostentarsi che con Diatomee viventi, site alla loro portata. La qualità delle Diatomee incontrate negli echini e nelle oloturie escludono la possibilità che quelle fossero cadute dalla superficie. Alcuna delle oloturie presentò copia stragrande della esilissima *Synedra Thalassiotrix*, Cleve, in stato di integrità, la quale non si incontra mai negli scandagli o nei fanghi marini se non che in frammenti e in condizione di detrito, mentre, lunghe di tre o quattro millimetri, non hanno che qualche centesimo di millimetro di larghezza. Così negli echini vi erano molti tubi di *Rhizosolenia* di pareti fragilissime, per cui non una sola volta il disserente li ha incontrati nei moltissimi scandagli e fanghi marini da lui medesimo esaminati. Ma in seguito si è ottenuta altra prova più evidente che le Diatomee ritrovate fra i contenuti di quelli animali devono essere state ingurgitate non in condizione fossile o semifossile, ma in stato di vegetazione. Sottomesso al microscopio alquanto di quei materiali bruti in condizione diluita, alcuna rara Diatomea fu veduta, che conservava all'interno della cellula il protoplasma colorato in giallo dall'endocroma. Non può quindi rimaner dubbio che quelle Diatomee abbiano vegetato in fondo al mare, a meno che non si pensasse che quelle abbiano vissuto alla superficie, e abbandonate dalla vita siano precipitate al fondo in così breve tempo da conservare il loro protoplasma e l'endocroma. Ma l'inammissibilità di così celere precipitazione venne a lungo e dettagliatamente dimostrata con argomenti dedotti dalla struttura delle Diatomee, dal rapporto fra il peso specifico delle medesime e quello dell'acqua marina, dal confronto con quanto accade con le pol-

veri atmosferiche, e da più altri argomenti e confronti, per i quali il disserente ritenne dimostrato non solamente che la precipitazione della Diatomea morta non potrà aver luogo in tempo più breve di quello determinato dalla decomposizione del protoplasma, ma che la discesa della cellula diatomacea alla suindicata profondità non potrà non esigere un tempo estremamente e incalcolabilmente lungo.

CASTRACANE, Conte Ab. F. – *Sulle fermentazioni sotto pressione, studi del socio Sig. A. Certes*:

Il Presidente a nome del socio corrispondente Sig. Adriano Certes fece conoscere all'Accademia alcuni interessantissimi risultati ottenuti sull'argomento delle fermentazioni sotto pressione. Tali esperienze furono eseguite nel laboratorio di Pasteur a mezzo dell'apparecchio di Caillotet, coadiuvato dal Dr. Cochin. L'importanza di tali ricerche apparisce evidente quando si riflette che mentre un tempo con il nome di fermentazione si intendeva soltanto la trasformazione dello zucchero in alcool, ora invece con tal nome si comprendono tutti i fenomeni, per i quali un organismo superiore, abbandonato dalla vita, presta l'alimento ad altri organismi di ordine inferiore, i quali sembrano avere lo scopo provvidenziale di ricondurre la materia organica allo stato elementare. Quanto la teoria della fermentazione sia stata sviluppata e trasformata dalle ricerche dell'illustre Pasteur, il quale alla teoria chimica sostituì la vitalistica, riconoscendo nell'agente delle fermentazioni tutte, alcooliche, acetiche, lattiche, panarie, putride e quante altre si vogliano, un principio organizzato vitale, nessuno può ignorarlo. Però questi fenomeni che si svolgono sotto i nostri occhi avranno egualmente luogo negli abissi marini, che sappiamo popolati da innumerevoli animali? Questo è ciò che si è proposto elucidare sperimentalmente il valente Sig. Certes. Questi ha incominciato dallo sperimentare l'azione del lievito su una soluzione zuccherina assoggettata a pressioni enormi di più centinaia di atmosfere; e ne è venuto alle seguenti conclusioni: 1.° Che la vitalità del lievito non è distrutta dalla pressione prolungata di 300 e 400 atmosfere, purchè la pressione e la decompressione si operi lentamente; 2.° Che la fermentazione si opera a quelle grandi pressioni, però quella è più lenta, ciò che sarà elucidato dosando lo zucchero o l'alcool; 3.° Finalmente che l'acido carbonico sviluppato sotto queste alte pressioni si trova in uno stato di equilibrio particolare, per cui al principio non si manifesta, per lo che alcuni osservatori ne furono ingan-

nati. Che se, per esempio, si rompa l'estremità del tubo capillare, per il quale si trasmette la pressione, subito ha luogo uno sviluppo abbondante di gas, e il tubetto si vuota in qualche secondo, con una bottiglia di vino di Champagne. Il Sig. Certes si è messo su così bel cammino, nel quale non vorrà certamente arrestarsi; e ne ritrarrà la ricompensa del plauso di tutti quelli che si interessano all'allargamento delle nostre cognizioni su quanto accade nei più profondi, inaccessibili abissi del mare.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di una memoria del socio P. T. Bertelli*:

Il Segretario a nome del ch. P. Timoteo Bertelli, socio corrispondente, presentò una Memoria col titolo: « Risposta ad alcune antiche e nuove » obbiezioni contro le osservazioni microsismiche, e riflessioni sull'origine e » forma delle manifestazioni endodinamiche », che verrà pubblicata nel volume I delle Memorie.

Boncompagni, D. B. – *Presentazioni diverse*:

Il Principe D. B. Boncompagni presentò all'Accademia, da parte del P. Pepin socio corrispondente, l'originale manoscritto d'un suo lavoro intitolato « Solution des deux équations $13x^4 - 11y^4 = zz^2$, $8x^4 - 3y^4 = 5z^2$; » par le P. Théophile Pepin, S. J. », che viene pubblicato negli Atti della presente sessione.

Presentò anche un esemplare di ciascuna delle pubblicazioni seguenti:

1. UN MODO || DI || FORMAZIONE DELLA GRANDINE || NOTA || DEL PROF. GIOVANNI LUVINI || Estratto dalla *Rivista Scientifico-Industriale* || diretta dall'Ing. G. VIMERCATI. In-8°, di 16 pagine, nella 16ª delle quali (lin. 15) si legge: « 887–1874. Firenze, Tip. dell'Arte della Stampa ».

2. ORIGINE DELL'ELETTRICITA' DELL'ARIA || DELLE NUBI TEMPORALESCHE || E DELLE ERUZIONI VULCANICHE || PER || GIOVANNI LUVINI || Prof. di Fisica a Torino || Estratto dalla *Rivista Scientifico-Industriale* || diretta dall'Ing. G. VIMERCATI. In-8°, di 25 pagine, nell'ultima delle quali (lin. 21) si legge: 1124. – Firenze, » Tip. dell'Arte della Stampa, Via Pandolfini, 14, diretta da S. Landi ».

3. RELAZIONE || TRA LE || RADICI DI ALCUNE EQUAZIONI || FONDAMENTALI DETERMINANTI || NOTA || DI || P. TARDY. || TORINO || ERMANNO LOESCHER. || Libraio della R. Accademia delle Scienze || 1884. In–8° di 16 pagine, nella 2ª delle quali si legge: « Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. XIX. || » Adunanza del 25 Maggio 1884. || TORINO, STAMPERIA REALE || DI G. B. Paravia e C. ».

4. NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE. || *Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio-*

Carlo-||*Marcellino Poullet-Delisle; Notizie raccolte da* || *B. Boncompagni.* In-8°, di 2 pagine, nella 2ª delle quali (lin. 32–33) si legge: « (Extrait des » *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. III; 1884.) || 9789 Paris. – » Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55 », firmato (pag. 2ª, lin. 31) « ARISTIDE MARRE » Recensione di un lavoro intitolato « INTORNO || » ALLA VITA ED AI LAVORI || DI || ANTONIO CARLO MARCELLINO POULLET-DELISLE, » ecc. indicato più oltre.

5. Jahrbuch || über die || Fortschritte der Mathematik || im Verein mit anderen Mathematikenn || und unter besonderer Mitwirkung der Herren || Felix Müller und Albert Wangerin || herausgegeben || von || Carl Ohrtmann. || Vierzehnter Band || Jahrgang 1882 || (In 3 Heften) || Heft 1 || Berlin, || Druck und Verlag von Georg Reimer. || 1884.

6. INTORNO AD UNA LETTERA || DI || CARLO FEDERICO GAUSS || AL || D.ᴿ ENRICO GUGLIELMO MATTIA OLBERS || MEMORIA || DI B. BONCOMPAGNI, ecc., ESTRATTO DAGLI *ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI* || TOMO XXXVI. – ANNO XXXVI, SESSIONE VIIª DEL 20 MAGGIO 1883. || ROMA || TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. || Via Lata, N.° 3. || 1884. In-4°, di 96 pagine.

7. INTORNO || ALLA VITA ED AI LAVORI || DI || ANTONIO CARLO MARCELLINO POULLET-DELISLE || NOTIZIE RACCOLTE || DA B. BONCOMPAGNI || ESTRATTO DAL *BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA* || *DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE*, || TOMO XV. – NOVEMBRE 1882. || ROMA || TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || Via Lata, N. 3. || 1883. In-4°, di 12 pagine.

8. CASSINI GIAN DOMENICO. In-8°, di 12 pagine, nella 12ª delle quali si legge: « Estratto dal *Giornale degli Eruditi e dei Curiosi* || Vol. IV, pag. 269–276. » Padova 1884, Tipografia Crescini », contenente notizie intorno ad un poema astronomico di Gian Domenico Cassini.

9. IL MATEMATICO P. FRANCESCO LUINO. In-8°, di 4 pagine nella 2ª delle quali si legge: « Estratto dal *Giornale degli Eruditi e dei Curiosi.* || Vol. V, » pagg. 48–49. || Padova 1884, Tipografia Crescini », in risposta ad un quesito fatto nel giornale medesimo.

10. Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, Octobre 1884. In-8°, di 4 pagine, nell'ultima delle quali (lin. 9) si legge: « Bruxelles. – A. VROMANT, imprimeur éditeur, rue de la Chapelle 3 », firmata (pag. 4ª, lin. 8) « MANSION », e contenente una recensione fatta dal Sig. Prof. Paolo Mansion delle tre pubblicazioni seguenti: LETTRE || DE || CHARLES-FRÉDÉRIC GAUSS || AU || D.ᴿ HENRI-GUILLAUME-MATHIAS OLBERS, ecc., BERLIN, ecc., MDCCCLXXXIII. Riproduzione fotolitografica, in 4.° p.°

7

LETTERA ‖ DI ‖ CARLO FEDERICO GAUSS ‖ AL ‖ D.[R] ENRICO GUGLIELMO MATTIA OLBERS, ecc., 1883. In-4.° (1)

INTORNO AD UNA LETTERA ‖ DI ‖ CARLO FEDERICO GAUSS ‖ AL ‖ D.[R] ENRICO GUGLIELMO MATTIA OLBERS, ecc. ROMA, ecc. 1884. In-4.° (2)

11. ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE. ‖ (Extrait des Bulletins, 3.me série, tome VIII, n.os 9–10, 1884.) ‖ CLASSE DES SCIENCES. In–8°, di due pagine, nella seconda delle quali (lin. 26) si legge: « Imprimerie de F. HAYEZ, Bruxelles, rue de Louvain, 108 », contenente una nota del Sig. Prof. Eugenio Carlo Catalan, relativa specialmente alla terza delle dette tre pubblicazioni relative al Gauss.

CASTRACANE, Conte Ab. F. – *Presentazioni di note*:

Il Presidente presentò da parte del Sig. A. Certes socio corrispondente le seguenti Note a stampa: 1.° « De l'action des hautes pressions sur les » phénomènes de la putréfaction et sur la vitalité des micro-organismes » d'eau douce et d'eau de mer: » 2.° « Parasites et commenseaux de l'huitre » (note complémentaire.) »

DE ROSSI, Prof. M. S. – *Presentazioni di note*:

Il Segretario presentò da parte degli autori, soci corrispondenti, le seguenti note a stampa: 1.° « Quelque théorème d'arithmétique, par E. Catalan ». 2.° « Problèmes et théorèmes de probabilités, par Eugène Catalan ». 3° « Note sur le théorème de Lambert; par M. E. Catalan. » 4.° « Sto- » nyhurst College Observatory. – Results of meteorological and magnetical » observations by the Rev. S. J. Perry, S. J., F. R. S. » 5° « Zur » Geschichte der Gregorianischen Kalenderreform, von Repetent Dr. Schmid, » III, Nachtrage » 6.° « Crónica científica, revista internacional de cien- » cias, Director D. R. Roig y Torres. »

Il socio Prof. G. Tuccimei propose all'Accademia di inviare al socio corrispondente Prof. G. Meneghini una lettera di congratulazione per il cinquantesimo anniversario del suo insegnamento. La proposta venne unanimemente approvata; ed il Segretario fu incaricato di trasmettere al nostro illustre socio Prof. Meneghini i sentimenti di felicitazione del corpo accademico.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – P. G. Foglini. –

(1) Un esemplare di ciascuna di queste due pubblicazioni fu presentata all'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei, nella Sessione 7.a dei 20 Maggio 1883. (Vedi ACCADEMIA PONTIFICIA ‖ DE'NUOVI LINCEI ‖ ANNO XXXVI (1882—83) ‖ Sessioni v.a, vi.a e vii.a, pag. 3.

(2) Vedi sopra, n. 6.

Ing. A. Statuti. – P. F. S. Provenzali. – Cav. F. Guidi. – Prof. G. Tuccimei. – D. B. Boncompagni. – Prof. M. S. De Rossi.
AGGIUNTI: March. L. Fonti.

L'Accademia apertasi legalmente alle ore 2 $^1/_2$ p. venne chiusa alle 4 $^1/_2$ p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* 1883. — Berlin, 1884., in-4°
2. *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften.* München 1884. In-4.°
3. *Académie Commerciale catholique de Montreal. Année académique* 1876—77. Montréal, 1877.
4. *Almanach dar Koeniglich Bayerischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr* 1884. München.
5. AMENDUNI (G.) — *Sulle opere di bonificazione della plaga litoranea dell'agro romano, ecc., Testo.* – Roma, 1884. In-4°
6. —— *Tavole.* — Roma, 1884.
7. *Archives de Musée Teyler.* — Série II. — Quatrième Partie. — Haarlem, 1883, in-8.°
8. *Atti della Accademia Olimpica di Vicenza.* — 1° e 2° Semestre 1882. — Vol. XVII. — Vicenza, 1882. In-8°
9. *Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania.* — Catania, 1883. In-4°
10. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXI, 1883—84, — Serie terza — Transunti — Vol. VIII. — Fasc. 15, 16. — Roma, 1884, in-4°
11. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* — Vol. XIX, disp. 4—7. Torino 1884. In 8.°
12. *Atti della Reale Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti.* — T. XXIII. — Lucca, 1884, in-8°
13. *Atti della Società crittogamologica italiana.* — A. XXVII. — Serie Seconda, Vol. III. — Disp. III, — Varese, 1884. In-8°
14. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* — T. II. — Serie VI. — disp. 4—9. Venezia, 1883—84, in-8°
15. BACHMETIEFF (B. E.) — *Meteorologische Beobachtungen, etc.,* Moskau, 1883. In-4,°
16. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. VI. — Entr. 2ª y 3ª — Buonos Aires, 1884. In-8.°
17. *Bollettino dell'Osservatorio della Regia Università di Torino.* — A. XVIII (1883). Torino, 1884. In-4.°
18. *British Association for the Advancement of science. Montreal Meeting.* — Montreal, 1884. In-8.° — *Report on conveyance.* — *List of Hotels, etc.* — *Programme of local arrangements.* — *Second list of Members and Associates* — *Enquiries respecting public education.* — *Special excursions.* — *Visit to the City ot Quebec.*
19. BONCOMPAGNI D. B. — *Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss al D. Enrico Guglielmo Mattia Olbers.* — Roma, 1884. In-4.°
20. —— *Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio Carlo Marcellino Poullet-Delisle.* — Roma, 1883. In-4.°
21. —— *Cassini Gian Domenico.* — Padova, 1884. In-8.°
22. —— *Il matematico P. Francesco Luino.* — Padova, 1884. In-8.°
23. *Bulletin astronomique et météorologique de l'observatoire impérial de Rio de Janeiro.* — Déc. 1883, n.° 12. — Rio de Janeiro, 1883. In-4.°

24. *Bulletin de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse.* — T. IV, 1883, n. 3, 4. — *Statuts et règlements.* — Toulouse, 1883. In-8.°
25. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1883. — n.° 3. — Moscou, 1884. In-8.°
26. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. X. — n. 3—7. — Roma, 1884, in-8.°
27. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XVI, Dic. 1883. — T. XVII, Gennaio, Febbraio, 1884. — Roma, 1884. In-4.°
28. CAHIS Y BALMANYA (D. M.) — *Concepto cientifico de la Homeopatia.* — Barcelona, 1883. In-8.°
29. *Catalogo della esposizione collettiva del Ministero dei Lavori Pubblici alla Esposizione nazionale di Torino del 1884.* In-8.°
30. CATALAN (E.) — *Note sur le théorème de Lambert.* — Paris. 1884. In-8.°
31. —— *Recensione di una memoria del Principe D. B. Boncompagni intitolata « Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss.* — Bruxelles, 1884. In-8.°
32. —— *Quelques théoremes d'arithmetique.* — Bruxelles, 1884. In-4.°
33. —— *Problèmes et théorèmes de probabilités.* — Bruxelles, 1884. In-4.°
34. *Cenni monografici dei singoli servizi dipendenti dal Ministero dei Lavori Pubblici per gli anni* 1881, 1882, 1883. — Roma, 1884. In f.°
35. CERTES (A.) — *De l'action des hautes pressions sur les phénomènes de la putréfaction et sur la vitalité des micro-organismes d'eau douce et d'eau de mer.* — Paris, 1884, In-4.°
36. —— *Parasites et commensaux de l'huitre (Note complémentaire).* — Paris, 1883. In-8.°
37. CHARRIER (A.) — *Effemeridi del Sole, della luna, e dei principali pianeti per l'anno* 1884 : idem *per l'anno* 1885.
38. *Crónica científica.* — A. VII. N. 162, 164, 166—168. — Barcelona, 1884. In-8.°
39. DAHL (B.) — *Die Lateinische Partikel VT.* Kristiania, 1882. In-8.°
40. DORNA (A.) — *Prime osservazioni con anelli micrometrici all'osservatorio di Torino.* — *Nota sulla determinazione dei raggi degli anelli micrometrici con stelle.* — Torino, 1884. In-8.°
41. —— *Nuovo materiale scientifico e prime osservazioni con anelli micrometrici all'Osservatorio di Torino.* — Torino, 1884. In-8.°
42. FOLIE (F.) — *Douze tables pour le calcul des réductions stellaires.* — Bruxelles, 1883. In-4.°
43. HAUSHOFER (K.) — *Franz von Kobell.* — München, 1884. In-4.°
44. *Jahrbüch über die Fortschritte der Mathematik, etc.*, — Jahr, 1882. — Heft. 1. — Berlin, 1884, in-8.°
45. *Jahreshefte des Vereins fur vaterländische Naturkunde in Wurttemberg.* — Stuttgart, 1884. In-8.°
46. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVI. — n.° 6—8. — St. Pétersbourg, 1884, in-8.°
47. KUPFFER (C.) — *Gedächtnissrede auf Theodor L. W. von Bischoff.* — München, 1884. In-4.°
48. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXV, Serie XII, Vol. VI, quad. 816, Vol, VII, 817—823: Vol. XIII, quad. 824—828. — Firenze, 1884, in-8.°
49. LUVINI (G.) — *Un modo di formazione della grandine.* — Firenze, 1884. In-8.°
50. —— *Origine dell'elettricità nell'aria delle nubi temporalesche e delle eruzioni vulcaniche.* Firenze, 1884. In-8.°
54. MANSION (P.) — *Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss al Dr. Enrico Guglielmo Mattia Olbers etc.* — *Rivista.* — Bruxelles, 1884. In 8.°
52. MARRE (A.) — *Intorno alla vita ed ai lavori di Antonio-Carlo-Marcellino Poullet-Delisle etc.* — *Rivista.* — Paris, 1884. In-8.°
53. *Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux.* — 2e Série, T. V, 3e cahier. — Paris, 1883. In-8.°
54. *Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat in den Jahren* 1877, 1878, 1879, 1880. Dorpat, 1884. In-8.°

55. PERRY (S. J.) — *Results of Meteorological and Magnetical Observations*, 1883. — Manresa 1884. In-8.° piccolo.
56. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — Juin — Novembre 1884: *Partie tecnique.* — Juin—Novembre 1884. — Paris, 1884, in-8°
57. *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain.* — n,° 76, 77. — London, 1883—84. In-8.°
58. *Publications of the Cincinnati Observatory. Observations of Comets*, 1880—82. — Cincinnati, 1883. In-8.°
59. *Puissance du Canada. Le grand Occident canadien.* Ottawa, 1882. In-8.°
60. RAYET. *Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin* 1882 *à Mai* 1883. Bordeaux 1883. In-8.°
61. *R. Comitato Geologico d'Italia.* — Bollettino n. 3—10: 1884. Roma, 1884, in-8°
62. *Rendiconto delle sessioni dell'Accademia reale delle scienze dell'Istituto di Bologna.* Anno 1883—84. — Bologna, 1884. In-8.
63. *Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.* — Aprile—Settembre 1884. — Napoli, 1884, in-4.°
64. REUSCH (H.) — *Silurfossiler og pressede Konglomerater.* — Kristiania, 1882. In-4.°
65. SARS (G. O.) — *Carcinologiscke Bidrag til Norges Fauna.* — Christiania, 1879. In-4.°
66. SCHMID. — *Zur Geschichte der Gregorianischen Kalenderreform.*
67. SIEBKE (H.) — *Enumeratio insectorum Norvegicorum,* — Christiania, 1880. In-8.°
68. *Sitzungberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — I—XXXIX. Berlin, 1884, in-8.°
69. STADERINI (A.) — *Brevi cenni sopra due sistemi di schedario per catologhi.* — Roma, 1884. In-8.°
70. SPARAGNA (A.) — *Lettera di C. F. Gauss al Dr. E. G. M, Olbers etc. traduzione dal tedesco.*
71. STENERSEN (L. B.) — *Myntfundet fra Graeslid i Thydalen.* — Christiania, 1881. In-4.°
72. TARANTELLI (R.) — *Fiori e spine.* — *Origine, svolgimento ed effetti del sapere.* — Chieti, 1884. In-8.°
73. —— *La voce dell'amor fraterno.* — *Discorsi.* — Chieti, 1884. In-8.°
74. —— *Il mondo non è angusto.* — Chieti, 1884. In-8.°
75. TARDY (P.) — *Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti.* — Torino, 1884, In-8.°
76. TASSÉ (E.) — *Le Nord-Ouest: la province de Manitoba. etc.* — Ottawa, 1882. In-8.°
77. *Teuth Annual Report of the public Library and Gallery of Art committee.* 1883—84. — Swansea, 1884. In-8.°
78. *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society.* Vol. III, Part VI, VII. Vol. IV. Part 1—4. — Dublin, 1883. In-8.°
79. *The scientific Transactions of the Royal Dublin Society.* Vol. I, XXII—XXV: Vol. III, I, II, III. — Dublin, 1884. In-4.°
80. *Three Middies Ashore, or a Land Cruise to the North.* — Montreal.
81. TORP. (A.) — *Die Flexion des Pali in ihrem Verhältniss zum Sanskrit.* — Christiania, 1881. In-8.°
82. TRAVAGLINI (T.) — *Il sacro volume biblico tradotto e commentato secondo la mente della Chiesa Cattolica*, Fasc. 1.° — Vasto, 1884. In-4.°
83. *Verhandlungen und Mittheilungen des Siebenbürgischen Vereins fur Naturwissenschaften in Hermannstadt, XXXIV Jahrgang.* — Hermannstadt, 1884. In-8.°
84. VIMERCATI (G.) — *Rivista scientifico-industriale. etc.* A. 1883. — Firenze, 1883. In-8°
85. ZANON (G.) — *Analisi delle ipotesi fisiche.* — Venezia, 1885. In-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IIa DEL 18 GENNAIO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ÉTUDE SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES NUMÉRIQUES DANS LEUR RELATION AVEC LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES;

I. On sait, par la *Règle des signes de Descartes*, qu'une équation algébrique, rationnelle et entière, ne peut avoir plus de racines réelles positives qu'elle ne présente de variations, ni plus de racines réelles négatives que sa transformée en $-x$ n'offre elle-même de variations. Mais cette Règle ne dit pas si une telle équation peut *toujours*, quelle qu'en soit l'espèce, atteindre cette double limite maxima, moyennant des valeurs numériques convenables attribuées aux coefficients de ses différents termes. Il y a là une question élémentaire qui semble n'avoir pas été étudiée et qui n'est pas sans intérêt au point de vue doctrinal.

La question dont il s'agit peut s'énoncer ainsi:

Peut-on toujours former des équations numériques d'une espèce et d'un degré donnés, telles qu'on soit certain à priori qu'elles possèdent effectivement un nombre prévu de racines réelles et de racines imaginaires, respectivement?

Il est clair que si le degré de l'équation était seul imposé et non son *espèce* (1), il n'y aurait pas, à vrai dire, de question; car il suffirait, une

(1) *L'espèce* d'une équation est déterminée par les signes de ses termes successifs et par la parité ou l'imparité de leurs exposants.

fois les racines choisies arbitrairement, de former le produit de facteurs connus, du premier et du second degrés, pour obtenir une équation satisfaisant à cette vague condition. Mais le problème est tout autre, si l'équation qu'on propose d'écrire, non seulement doit posséder un nombre déterminé de racines réelles, positives et négatives, et de racines imaginaires, mais encore est astreinte à présenter dans ses différents termes (dont quelques-uns peuvent manquer intentionnellement) une succession déterminée de signes. Car il est évident qu'en formant le produit dont il vient d'etre parlé, avec des facteurs composés de racines prises au hasard, la succession des signes y serait, en général, très différente de celle qui aurait été demandée, et, en outre, que si certains termes y manquaient par hasard, ce serait à des places quelconques et non à celles désignées par l'énoncé du problème.

II. Afin de procéder méthodiquement, il convient d'examiner d'abord le cas où l'équation qu'il s'agit de former doit être *complète*. Dans ce cas, le problème est toujours susceptible, et même d'une infinité de manières différentes, d'être résolu par un procédé uniforme et simple. Quant aux équations *incomplètes*, la solution est plus délicate; elle se complique même si rapidement, au fur et à mesure que s'accroît le nombre des termes absents, qu'on ne saurait se flatter de découvrir, comme dans l'autre cas, une démonstration générale et un procédé de calcul uniforme. Toutefois la marche à suivre dans chaque cas particulier peut être indiquée et mise en lumière, comme on aura soin de le faire dans la suite de cette Étude, à l'aide d'exemples variés.

§ I. *Équations complètes.*

III. La solution de la question proposée, repose, dans ce cas, sur les deux lemmes suivants:

Lemme I. *Le produit d'un polynôme algébrique* $f(x)$, *entier, rationnel, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable* x, *et complet, de degré* m, *par le binôme* $(x \pm a)$, *se compose d'un premier terme* $+x^{m+1}$, *suivi de* $m+1$ *termes dont les signes sont les mêmes (pour* $x+a$), *ou inverses (pour* $x-a$), *que ceux de mêmes degrés respectifs dans* $f(x)$, *à la seule condition que le nombre* a *soit plus grand qu'une limite inférieure facile à déterminer d'après les valeurs des coefficients de* $f(x)$.

En effet, soient $\pm px^r \pm qx^{r-1}$, deux termes consécutifs quelconques de $f(x)$. Le terme en x^r dans le produit sera

$$(\pm pa \pm q)\, x^r, \text{ si le multiplicateur est } x+a\,; \text{ et}$$

$$(\mp pa \pm q)\, x^r, \text{ si le multiplicateur est } x-a.$$

Si l'on donne à l'ensemble de la parenthèse le signe dont pa est affecté, on aura

$\pm (pa \pm q)\, x^r$, dans le premier cas, et

$\mp (pa \mp q)\, x^r$, dans le second.

Chaque parenthèse se composera donc, sauf pour les termes extrêmes, de deux termes, dont le premier, ayant a pour facteur, y sera toujours positif, tandis que le signe qui régit toute la parenthèse sera le même que celui de px^r dans $f(x)$, si le multiplicateur a été $x + a$, et inverse de celui-ci, lorsque le multiplicateur est $x - a$.

Il suffit donc, pour satisfaire aux conditions du lemme, que la valeur numérique de la somme algébrique des deux termes soit plus grande que zéro *dans chaque parenthèse*, abstraction faite du signe qui régit cette parenthèse elle-même. Or il en sera d'abord ainsi pour toutes celles où le terme q se présentera avec le signe $+$, et il n'y a point à s'en occuper. Quant aux autres, chacune d'elles donne lieu à une condition de la forme $pa > q$, d'où $a > \frac{q}{p}$. Il suffira donc qu'on prenne a plus grand que le plus grand de tous les nombres fractionnaires $\frac{q}{p}$, qui expriment le quotient d'un coefficient quelconque de $f(x)$ divisé par la coefficient qui le précède immédiatement, s'il a un signe contraire au sien. Supposons, par exemple, qu'on ait $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 10$, et que le multiplicateur soit $x + a$, on aura pour produit

$$F(x) = x^4 + (a - 3)\, x^3 - (3a - 7)\, x^2 + (7a + 10)\, x + 10\, a,$$

et l'on voit que les signes de $f(x)$ seront conservés dans les termes de mêmes degrés de $F(x)$, si l'on prend

$$a > 3, \; > \tfrac{7}{3}; \text{ donc } a > 3.$$

$f(x)$ restant le même que ci-dessus, si le multiplicateur est $x - a$, on trouve pour le produit, en y écrivant chaque terme avec un signe contraire à celui de même degré dans $f(x)$:

$$F(x) = x^4 - (a + 3)\, x^3 + (3a + 7)\, x^2 - (7a - 10)\, x - 10a,$$

où la seule condition qu'il y ait lieu de satisfaire est $7a > 10$, d'où $a > \frac{10}{7}$.

Lemme II. — *Le produit d'un polynôme* $f(x)$, *défini comme ci-dessus, par le trinôme* $x^2 \pm cx + d$, *se compose de deux termes*

$$+ x^{m+2} \pm (p_1 \pm c)\, x^{m+1},$$

suivis de $m + 1$ *termes, dont les signes sont les mêmes, respectivement, que ceux de mêmes degrés dans* $f(x)$, *si le nombre* d *est choisi plus grand que la plus grande des quantités* $\mp\left(\frac{t \mp qc}{p}\right)$, p, q, t, *étant les va-*

leurs absolues des coefficients de trois termes consécutifs quelconques de $f(x)$.

La démonstration de ce lemme étant analogue à celle du précédent, il serait superflu de la répéter ici. Il suffira d'offrir un exemple. Soit encore

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 10,$$

à multiplier par $x^2 \pm cx + d$, on trouve pour le produit

$$F(x) = x^5 (\pm c - 3)\, x^4 + (d \mp 3c + 7)\, x^3 - (3d \mp 7c - 10)\, x^2 + (7d \pm 10c)\, x + 10d,$$

et par conséquent on satisfera à la condition requise, en prenant d plus grand que la plus grande des quantités de signe contraire, par exemple, si c est positif, plus grand que $\frac{7c + 10}{3}$. Quant au nombre c, il sera pris > 3, si le terme en x^4 doit être positif, et, au contraire, < 3, si ce terme doit être négatif.

IV. Ces préliminaires établis, la solution du problème posé au § I ne présente plus de difficultés, lorsque l'équation est complète.

Supposons, en premier lieu, que toutes les racines de l'équation doivent être réelles, et que cette équation ait la forme

$$F(x) = x^m \pm p_1\, x^{m-1} \pm \ldots\ldots + px^7{}_{m-7} + p_{m-6}\, x^6 = p_{m-5}\, x^5 +$$

$$+ p_{m-4}\, x^4 + p_{m-3}\, x^3 - p_{m-2}\, x^2 - p_{m-1}\, x + p_m = 0.$$

Les deux derniers termes présentant la succession de signes $- +$, on prendra comme point de départ le binôme $-x + a$ ou, par inversion, $x - a$, et l'on y fera, pour plus de simplicité dans les calculs ultérieurs, $a = 1$.

Adjoignant le terme en x^2, qui est de même signe que celui en x, et inversant les signes, on voit qu'il s'agit de former une équation du second degré, où les signes se succèdent dans l'ordre $+ + -$, et dont l'un des facteurs linéaires soit $x - 1$. Il faut donc multiplier $(x - 1)$ par le binôme $x + a$, ce qui donne (a étant ici une nouvelle indéterminée):

$$x^2 + (a - 1)\, x - a,$$

et pour que les signes écrits soient conservés, on doit prendre $a > 1$. Si l'on veut que les racines successives soient des nombres entiers et les moindres possibles, on fera $a = 2$, d'où

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Adjoignant le terme en x^3, qui est positif, l'équation qu'il s'agit de former, à l'aide de la précédente, devra présenter la succession de signes $+--+$, ce qui montre que le nouveau facteur linéaire à introduire doit être $x-a$, et donne

$$x^3 - (a-1)\,x^2 - (a+2)\,x + 2a$$

avec la condition $a>1$, afin que les signes écrits soient effectivement conservés. Soit donc $a=2$, il vient, pour l'équation cubique cherchée :

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)\;(x-2)\;(x+2) = 0.$$

L'adjonction du terme en x^4 entraîne l'intervention d'un facteur $x+a$, puisque ce terme est de même signe que celui en x^3 dans la proposée $F(x)=0$. Le produit est

$$x^4 + (a-1)\,x^3 - (a-4)\,x^2 - 4\,(a-1)\,x + 4a = 0.$$

On devra donc, pour conserver les signes, prendre $a>1$. Si l'on fait $a=2$, l'équation aura deux racines égales. Si l'on veut des racines inégales, soit pris $a=3$, ce qui donne pour l'équation transitoire en x^4 :

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x-1)\;(x-2)\;(x+2)\;(x+3) = 0.$$

L'adjonction du terme en x^5 oblige à inverser les signes de l'équation précédente, puisqu'il est de signe contraire à celui en x^4. Le nouveau facteur linéaire sera donc $x-a$, ce qui donne

$$x^5 - (a-2)\,x^4 - (2a+7)\,x^3 + (7a-8)\,x^2 + (8a+12)\,x - 12\,a = 0,$$

et exige qu'on prenne $a>2$. Soit $a=3$, il vient

$$x^5 - x^4 - 13\,x^3 + 13\,x^2 + 36\,x - 36 = (x-1)\,(x-2)\;(x-3)\;(x+2)\;(x+3) = 0.$$

L'adjonction du terme en x^6, qui est positif, nécessite l'intervention du facteur $x-a$, et de la sorte les signes, qui avaient été inversés dans l'équation en x^5, seront rétablis. Il vient

$$x^6 - (a+1)\,x^5 + (a-13)\,x^4 + 13\,(a+1)\,x^3 - (13a-36)\,x^2 - 36\,(a+1)\,x + 36a = 0,$$

et l'on voit que l'on doit prendre $a>13$. Soit $a=14$, on trouve pour l'équation transitoire en x^6 :

$$x^6 - 15x^5 + x^4 + 195x^3 - 146x^2 - 540x + 504 = (x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-14)\,(x+2)\,(x+3) = 0.$$

On continuera d'après la même procédé, en adjoignant successivement les termes en x^7, x^8, ... etc. ... x^{m-1}, x^m, et employant à chaque fois, soit le facteur $x+a$, soit le facteur $x-a$, selon que le nouveau terme introduit a dans $F(x)$, le même signe, ou un signe contraire, que celui qui le suit, et, de la sorte, on parviendra à une équation en x^m, ayant les signes prescrits et toutes ses racines réelles, et même, si l'on veut, entières et les moindres possibles. La question proposée se trouve ainsi résolue, de la manière la plus générale et la plus simple, par un procédé uniforme, dans le cas où l'équation complète, dont l'espèce est donnée, doit avoir toutes ses racines réelles.

V. Il faut maintenant examiner le cas où cette même équation doit avoir des racines imaginaires. Ces racines devant alors être conjuguées deux à deux, l'introduction successive de facteurs *linéaires* ne peut plus avoir lieu, en ce qui les concerne, et il faut recourir, pour chaque couple de ces racines, à un facteur du second degré de la forme $x^2 \pm cx + d$, introduisant deux racines à la fois, avec la condition $c^2 < 4d$.

Pour fixer les idées, supposons que l'équation proposée, du septième degré, doive avoir deux racines imaginaires et soit de l'espèce.

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 - p_2 x^5 + p_3 x^4 + p_4 x^3 - p_5 x^2 - p_6 x + p_7 = 0.$$

Le moyen le plus simple de résoudre la question consiste à former une équation auxiliaire du 3ème degré, ayant deux racines imaginaires et présentant, comme les quatre derniers termes de $F(x)$, la succession de signes + − − +. On choisit ici l'équation du 3e degré, parce que le terme en x^3, savoir $p_4 x^3$, est positif dans $F(x)$. Si c'eût été le terme en x^2, on aurait pris directement une équation du 2e degré comme équation auxiliaire, ce qui ne serait pas possible dans le cas présent, puisqu'après avoir inversé les signes des trois derniers termes, le terme constant p_7 devient négatif, circonstance qui est incompatible avec l'existence de deux racines imaginaires dans une équation du second degré.

On trouve aisément que l'équation cubique

$$(x^2 - 3x + 4)(x + 2) = x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0,$$

satisfait aux deux conditions demandées. Nous la prendrons pour point de départ. Il suffit, cela fait, d'introduire successivement, à l'aide de facteurs linéaires, quatre autres racines réelles, en faisant usage du procédé déjà

exposé. On trouve ainsi, en prenant à chaque fois, le moindre nombre entier compatible avec les conditions du problème, que l'équation

$$\varphi(x) = (x+2)(x+5)(x+5)(x-5)(x-5)(x^2-3x+4) =$$
$$= x^7 - x^6 - 52\,x^5 + 53\,x^4 + 725\,x^3 - 1026\,x^2 - 1250\,x + 5000 = 0,$$

satisfait à l'énoncé, en admettant deux racines égales positives, et deux racines égales négatives.

Supposons, en second lieu, que l'équation $F(x)$ ci-dessus doive avoir quatre racines imaginaires et seulement trois racines réelles.

On pourra profiter de ce que le terme en x^4, dans $F(x)$, est positif, en même temps que le terme constant, pour attribuer les quatre racines imaginaires prescrites à une équation auxiliaire du 4[e] degré, presentant, comme la proposée dans ses cinq derniers termes, le succession de signes

$$+ + - - +.$$

A cet effet, on pourra combiner l'équation du second degré, employée dans l'exemple précédent, $x^2 - 3x + 4 = 0$, avec celle-ci: $x^2 + cx + d = 0$, où les coefficients c et d sont laissés indéterminés. Effectant le produit de ces deux trinômes, il vient

$$f(x) = x^4 + (c-3)\,x^3 - (3c - d - 4)\,x^2 - (3d - 4c)\,x + 4d = 0.$$

Les conditions auxquelles il y a lieu de satisfaire, moyennant des valeurs convenables de c et d, sont donc:

$$c^2 < 4d,$$

puisque les deux racines à introduire doivent aussi être imaginaires; puis

$$c > 3\,;\; 3c > d + 4\,;\; c < \tfrac{3}{4}d.$$

On y satisfait évidemment en prenant $c = 4$ et $d > \frac{16}{3} < 8$. Par exemple, si l'on adopte les valeurs $c = 4$, $d = 6$, on a pour l'équation auxiliaire en x^4:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2\,x^2 - 30\,x + 24 = (x^2 - 3\,x + 4)(x^2 + 4\,x + 6) = 0.$$

Il reste à introduire trois autres racines réelles. L'application du procédé exposé ci-dessus, montre que les conditions requises seront satisfaites par l'introduction successive des facteurs linéaires $(x-16)$, $(x+16)$, $(x-15)$, ce qui donne enfin

$$F(x) = (x-15)(x-16)(x+16)(x^2 - 3\,x + 4)(x^2 + 4\,x + 6)$$
$$= x^7 - 14\,x^6 - 273\,x^5 + 3584\,x^4 + 4826\,x^3 - 360\,x^2 - 121344\,x + 92160 = 0,$$

pour l'équation demandée.

VI. On voit, par ce qui précède, et sans qu'il soit utile de multiplier les exemples, que le même procédé s'appliquerait au cas où l'équation proposée, étant d'un degré qnelconque supérieur au septième, devrait posséder plus de quatre racines imaginaires; son application étant d'ailleurs facilitée, dans tous les cas, par une adresse convenable à tirer parti, pour la formation des équations auxiliaires successives, des signes positifs que pourront présenter les termes intermédiaires de l'équation, ainsi qu'on l'a fait dans l'exemple ci-dessus.

VII. Lorsque l'équation proposée devra posséder le nombre maximum de racines imaginaires compatible avec son degré, c'est-à-dire toutes si le degré est pair, et toutes moins une s'il est impair, on résoudra aisément la question en prenant arbitrairement les valeurs numériques de tous les coefficients, sauf du dernier qui est indépendant de x, et en déterminant ensuite celui-ci, de telle que l'équation ainsi complétée ait le nombre maximum de racines imaginaires, c'est-à-dire en lui donnant une valeur numérique plus grande que celle de l'ordonnée maxima, de signe contraire au sien, que possède la courbe parabolique $y = F_1(x)$, en désignant par $F_1(x)$ le polynôme $F(x)$ privé de son dernier terme.

S'il s'agit, par exemple, de l'équation $x^3 - p_1 x^2 - p_2 x + p_3 = 0$, et qu'on y fasse $p_1 = 5$ et $p_2 = 7$. Comme le maximum *négatif* de $y = x^3 - 5x^2 - 7x$ est égal à $-44,01$, environ, on sera certain que l'équation $x^3 - 5x^2 - 7x + 45 = 0$, entre autres, n'a pas de racines réelles positives. Elle ne peut donc avoir qu'une seule racine négative, qu'on trouve être égale à $-2,87$.

Si l'équation proposée est

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 - p_2 x^5 + p_3 x^4 + p_4 x^3 - p_5 x^2 - p_6 x + p_7 = 0,$$

avec la condition de ne posséder qu'une seule racine réelle; on prendra, par exemple, $p_1 = 1$; $p_2 = 5$; $p_3 = 3$; $p_1 = 6$; $p_5 = 4$; $p_6 = 2$, et il suffira, pour résoudre la question, de prendre p_7 plus grand que l'ordonnée négative maxima de la courbe parabolique

$$y = x^7 - x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 2x,$$

par exemple $p_7 = 155$.

En résumé, lorsque l'équation proposée est complète, on peut toujours, quelle que soit la proportion des nombres de racines réelles et imaginaires qu'elle devra posséder, déterminer, d'une infinité de manières différentes, mais non arbitraires, les valeurs numériques de coefficients qui satisfassent

cette condition, et les développements dans lesquels nous venons d'entrer montrent comment peut se faire cette détermination.

On peut même satisfaire à la condition supplémentaire que l'équation ait un terme nul; car il suffira pour cela, après qu'on aura effectué le produit du polynôme auxiliaire de degré $m-1$ déjà trouvé, par le binôme $x \pm a$, de prendre pour valeur de l'indéterminée a celle du plus grand nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$, parmi tous ceux exprimant le quotient d'un coefficient de $F(x)$ par le coefficient qui le précède immédiatement, si ce quotient est négatif, au lieu de prendre une valeur plus grande, comme on le fait lorsque l'équation doit être complète. Mais il y a lieu de remarquer que le terme qu'on ferait ainsi disparaître aurait son rang déterminé par les circonstances finales du calcul, et qu'ainsi ce rang ne pourrait être fixé à priori. Lorsque le rang du terme qui doit manquer est, au contraire, indiqué par les conditions de l'énoncé, le problème à résoudre se rattache à la formation des équations incomplètes, dont nous allons maintenant nous occuper.

SECONDE PARTIE

ÉQUATIONS INCOMPLÈTES.

VIII. La formation d'une équation numérique incomplète, dont le degré et l'éspèce sont désignés, dérive, en thèse générale, des mêmes principes que ci-dessus, mais en introduisant dans leur application les modifications ou précautions nécessaires que cette circonstance nouvelle comporte. Celles-ci deviennent d'ailleurs de plus en plus nombreuses et compliquées, au fur et à mesure que s'accroît le nombre des termes qui, d'après l'énoncé du problème, doivent manquer dans l'équation, à des rangs déterminés.

Pour procéder méthodiquement, nous commencerons par le cas le plus simple, celui où il ne manque qu'un seul terme.

Il est clair qu'alors la marche tracée pour le cas des équations complètes, ne saurait être suivie telle quelle. En effet, l'obligation de satisfaire aux deux conditions:

1° que le terme désigné disparaisse,

2° que les valeurs numériques des coefficients des autres termes, comprises entre les parenthèses, soient *positives* en valeur absolue;
exige qu'on puisse disposer finalement de deux indéterminées, et non plus d'une seule.

En conséquence, le dernier multiplicateur ne saurait plus être un binôme du premier degré, de la forme $x \pm a$. Il devra consister en un trinôme du second degré, tel que $x^2 \pm cx \pm d$, c et d étant deux indéterminées dont la valeur numérique reste disponible. Le signe à attribuer à d, dans ce trinôme, dépendra d'ailleurs de celui dont le terme en x^{m-2} est affecté, dans l'équation proposée du degré m. Si celui-ci est positif, d devra être pris avec le signe $+$; s'il est négatif, d devra être pris avec le signe $-$. Quant au signe du terme cx, il pourra, selon le cas, être positif, ou négatif, où l'un et l'autre indistinctement.

On formera préalablement une équation auxiliaire $f(x) = 0$, numérique et du degré $m - 2$, dont le premier terme, x^{m-2} sera positif, tandis que tous les termes suivants seront affectés des mêmes signes que ceux de mêmes degrés respectifs dans la proposée $F(x) = 0$. Cela fait, on multipliera $f(x)$ par le trinôme $(x^2 \pm cx + d)$, si le terme en x^{m-2} est positif dans $F(x)$, et par le trinôme $(x^2 \pm cx - d)$ si le terme en x^{m-2} est négatif dans $F(x)$. Enfin on déterminera c et d, de façon à satisfaire, à la fois, à l'égalité qui résulte, dans le produit ainsi obtenu, de la condititiqn d'y rendre nul le coefficient du terme qui doit manquer, et à celle des inégalités qui emporte, par à fortiori, toutes celles de même nature, de façon que les valeurs absolues des coefficients de tous les termes soient positives, indépendamment du signe extérieur qui régit chacune des parenthèses qui en contiennent l'expression. On devra d'ailleurs, selon le cas, avoir aussi égard à la condition que les deux dernières racines à introduire ainsi simultanément soient réelles, ou imaginaires, c'est-à-dire $c^2 > 4d$, ou $c^2 < 4d$, lorsque d peut être pris avec le signe $+$, comme il a été expliqué plus haut.

En général, cette double indétermination de c et d suffira, comme on va le voir, pour obtenir, et même en nombre infini, la solution du problème.

IX. Pour mieux fixer les idées, nous prendrons comme exemple l'équation du septième degré

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 + p_2 x^5 - p_3 x^3 - p_4 x^2 + p_5 x + p_6 = 0,$$

où le terme en x^4 manque, et nous supposerons d'abord que l'équation nu-

mérique qu'il s'agit de former doive avoir toutes ses racines réelles, ce à quoi la Règle de Descartes ne s'oppose pas, puisque le terme absent est compris entre deux termes de signes contraires.

L'équation auxiliaire $f(x)=0$, à former préalablement, sera donc du type

$$f(x)=x^5-q_1 x^4-q_2 x^3-q_3 x^2+q_4 x+q_5=0,$$

où l'on donne, préférablement mais non pas nécessairement, le signe $-$ au terme en x^4, qui n'a pas son analogue dans $F(x)$.

L'une des équations numériques les plus simples qu'on puisse former, avec des racines entières et inégales, et qui soit de l'espèce requise, est la suivante:

$$f(x)=x^5-19x^4-149x^3-49x^2+580x+500=(x+1)(x+2)(x+5)(x-2)(x-25)=0,$$

à laquelle on arrive par le procédé expliqué dans la *Première Partie*.

Le terme en x^5 étant positif dans $F(x)$, c'est, comme il a été dit plus haut, le trinôme $x^2 \pm cx+d$, qui doit intervenir comme multiplicateur. Nous y adopterons le signe $-$ pour le terme cx, afin de satisfaire plus sûrement à la condition d'avoir un terme en x^6 négatif, ainsi que l'équation $F(x)=0$ le réclame. Effectuant le produit, il vient

$$\varphi(x)=f(x)(x^2-cx+d)=x^7-(c+19)x^6+(d+19c-149)x^5-(19d-149c+49)x^4-$$
$$-(149d-49c-580)x^3-(49d+580c-500)x^2+$$
$$+(580d-500c)x+500d=0.$$

Et les conditions auxquelles c et d doivent satisfaire sont les suivantes:

1° $c^2>4d$, puisque les deux racines à introduire doivent être réelles;

2° $19d-149c+49=0$, puisque le terme en x^4 doit disparaître;

3° enfin $d+19c>149$, car cette inégalité entraîne toutes les autres de même espèce. On en conclut

$$d=\frac{149c-49}{19}; \text{ puis } c^2>4\times\frac{149c-49}{19}; \text{ d'où } c>31,02.....$$

Donc si l'on fait $c=32$, d'où $d=248,37$, il vient pour l'équation demandée

$$\varphi(x)=(x+1)(x+2)(x+5)(x-2)(x-13,24...)(x-18,76...)(x-25)=0,$$

qui, développée, satisfait à la succession requise des signes et dont les

sept racines sont les cinq de l'équation $f(x)$ ci-dessus et ces deux-ci $+13,24\ldots$, $+18,76\ldots$

Si l'on voulait que les coefficients de $\varphi(x)$ fussent tous des nombres entiers, on devrait prendre $c = 47 + 19i$, i étant un entier $\overline{\gtrless} 0$.

Comme second exemple, supposons que le terme manquant soit compris entre deux termes de même signe, comme dans l'équation

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 + p_2 x^5 + p_3 x^3 - p_4 x^2 + p_5 x + p_6 = 0,$$

et que l'équation numérique à former ne doive pas avoir d'autres racines imaginaires que les deux qui lui sont imposées par la condition précitée.

On formera préalablement l'équation auxiliaire en x^5

$f(x) = x^5 - 54x^4 + 502x^3 - 1248x^2 + x + 1806 = (x+1)(x-2)(x-3)(x-7)(x-43) = 0.$

On introduira le trinôme $x^2 + cx + d$, où le terme cx est positif par un motif qui sera expliqué dans un moment. Effectuant le produit, on a

$$\varphi(x) = x^7 - (54 - c)\,x^6 + (d - 54c + 502)\,x^5 - (54d - 502c + 1248)\,x^4 +$$

$$+ (502d - 1248c + 1)\,x^3 - (1248d - c - 1806)\,x^2 + (d + 1806c)\,x + 1806d = 0,$$

et les conditions auxquelles on doit satisfaire sont les suivantes :

1.° $c^2 < 4d$, puisque les deux racines à introduire sont imaginaires ;

2.° $54d - 302c + 1248 = 0$, condition qu'il eût été impossible de réaliser, si l'on eût pris le terme cx avec le signe $-$;

3.° enfin les inégalités

$$c < 54\,;\ c < \frac{d + 502}{54}\,;\ c < \frac{502d + 1}{1248}\,;\ c < 1248d - 1806\,;\ d + 1806c > 0.$$

On reconnaît aisément que toutes ces conditions sont satisfaites, si l'on prend (entre autres valeurs moins simples)

$$c = 1.\ \text{d'où, à cause de } 2^\circ,\ d = 14,07\ldots$$

XI. Si, dans l'exemple précédent, on eût attribué le signe + au terme $q_1 x^4$ de l'équation auxiliaire $f(x)$, il est aisé de voir, en s'aidant au besoin de quelques considérations de géométrie, que le mode le plus simple de solution consisterait à attribuer les deux racines imaginaires que $F(x)$ doit posséder, à cette équation $f(x)$, le trinôme multiplicateur devant être ensuite $x^2 - cx + d$, avec la condition $c^2 > 4d$.

On trouve par exemple, sans difficulté,

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)(x^2+5x+20)=x^5+x^4+x^3-69x^2+50x+120=0,$$

qui est de l'espèce requise et possède trois racines réelles avec deux imaginaires. Et de là on conclut

$$\varphi(x)=f(x)(x^2-cx+d)=x^7-(c-1)x^6+(d-c+1)x^5+(d-c-69)x^4+(d+69c-50)x^3-$$
$$-(69d+50c-120)x^2+(50d-120c)x+120d=0,$$

dont toutes les conditions seront satisfaites en prenant $c>18,7\ldots\ldots$ Soit $c=20$, d'où $d=c+69=89$, il vient pour l'équation demandée

$$\varphi(x)=x^7-19x^6+70x^5+1519x^3-7021x^2+2050x+10680=0,$$

solution plus simple que celle obtenue précédemment (X) et où les coefficients sont tous entiers. On en pourrait former une infinité d'autres, et notamment une plus simple encore correspondante à $c=19$.

XII. Nous avons jusqu'ici supposé que le terme en x^{m-2} avait le signe + dans $F(x)$, comme le terme x^m lui-même. Il convient d'examiner actuellement le cas où ce terme x^{m-2} est négatif.

Soit, par exemple,

$$F(x)=x^5+p_1x^4-p_2x^3-p_3x+p_4=0,$$

où le terme manquant est compris entre deux termes de même signe.

L'équation auxiliaire serait ici, en y conservant, sauf pour le terme en x^3, les mêmes signes que dans la proposée,

$$f(x)=x^3\pm q_1x^2-q_2x+q_3=0.$$

Mais on peut aussi y inverser tous les signes, ce qui donne

$$f(x)=x^3\pm q_1x^2+q_2x-q_3=0,$$

et même y supposer $q_1=0$. On reconnait facilement aussi que le plus simple est alors d'attribuer à $f(x)$ les deux racines imaginaires que $F(x)$ doit posséder. L'équation

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+2)=x^3+x-2$$

satisfait à ces conditions. Il reste, pour obtenir l'équation numérique de-

mandée $\varphi(x)$, à introduire deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, ce qui se fera à l'aide du trinôme multiplicateur (x^2+cx-d). On obtient, en effectuant le produit,

$$\varphi(x) = x^5 + cx^4 - (d-1)\, x^3 - (d+2c)\, x + 2d = 0$$

avec les conditions $c-2=0$ et $d>1$, d'où $c=2$, et d quelconque >1. Soit $d=2$, on a, pour l'équation demandée, parmi une infinité d'autres:

$$\varphi(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 6x + 4 = (x - 0{,}732)\,(x-1)\,(x+2{,}732)\,(x^2+x+2) = 0.$$

XIII. Dans ceux des exemples précédents, où l'équation proposée $F(x)=0$ a un terme manquant entre deux termes de même signe, nous avons supposé que l'équation numérique à former d'après ce type devait avoir toutes ses racines réelles, sauf deux. Mais on peut demander aussi qu'elle ait des racines imaginaires autres que ces deux-là, qui sont nécessaires. Soit, par exemple,

$$F(x) = x^7 + p_1x^6 - p_2x^5 - p_3x^3 - p_4x^2 + p_5x + p_6 = 0,$$

l'équation proposée, avec la condition que l'équation numérique demandée n'ait que trois racines réelles, négatives.

L'équation auxiliaire $f(x)$ du cinquième degré, qu'il faut former d'abord, devra donc posséder:

Soit trois racines réelles; et, dans ce cas, le trinôme multiplicateur final, devant introduire deux nouvelles racines imaginaires, sera nécessairement de la forme $x^2 \pm gx + h$, avec la condition $g^2 < 4h$; soit une seule racine réelle; et, dans ce 2e cas, le trinôme multiplicateur final, devant introduire deux nouvelles racines réelles et négatives, sera de la forme x^2+gx+h, avec la condition $g^2 > 4h$.

Examinons ces deux cas, successivement.

1er *Cas*. On doit former d'abord

$$f(x) = x^5 + q_1x^4 - q_2x^3 - q_3x^2 + q_4x + q_5 = 0,$$

car on reconnait facilement que le terme en x^4, qui manque dans $F(x)$, doit ici recevoir *de préférence* le signe +.

On formera une première équation auxiliaire en x^4, de la forme

$$\psi(x) = x^4 - r_1x^3 - r_2x^2 + r_3x + r_4,$$

où les termes de mêmes degrés respectifs ont les mêmes signes que ceux

de $f(x)$, en faisant le produit de deux trinômes du 2ᵉ degré (x^2+cx+d) et (x^2-ex+f), avec les conditions $c^2>4d$ et $e^2<4f$. D'où

$$\psi(x) = x^4 - (e-c)\,x^3 - (ce-f-d)\,x^2 + (cf-de)\,x + df = 0.$$

ainsi les coefficients r_i ci-dessus ont, respectivement, pour valeurs

$$r_1 = e-c\,;\; r_2 = ce-f-d\,;\; r_3 = cf-de\,;\; r_4 = df.$$

Par conséquent, on doit avoir, pour que les signes requis soient conservés:

$$e>c\,;\; ce>f+d\,;\; cf>de.$$

On satisfait à ces trois inégalités et aux deux précédentes, en prenant, par exemple,

$$c=4;\; d=3.\; e=4,\; f=5, \quad \text{d'où} \quad \psi(x) = x^4 - 8x^2 + 8x + 15,$$

où le terme en x^3 manque, ce qui est ici indifférent. Il faut maintenant introduire une troisième racine négative $-a$, ce qui donne

$$f(x) = \psi(x)\,(x+a) = x^5 + (a-r_1)x^4 - (ar_1+r_2)\,x^3 - (ar_2-r_3)\,x^2 + (ar_3+r_4)\,x + ar_4 = 0,$$

où l'on a, d'après l'équation numérique ci dessus,

$$r_1 = 0\,;\; r_2 = 8\,;\; r_3 = 8\,;\; r_4 = 15.$$

S'il ne s'agissait que de former $f(x)$, il suffirait que a satisfît à la condition $ar_2 > r_3$, c'est-à-dire $a>1$. Mais on reconnait promptement que la formation subséquente de $F(x)$, dans les conditions requises, exige qu'on ait $a>3$ <4. Soit donc, par exemple, $a = 3{,}2$. Il vient

$$f(x) = x^5 + 3{,}2x^4 - 8x^3 - 17{,}6x^2 + 40{,}6\,x + 48 = 0.$$

ce qui donne pour les valeurs des coefficients q_i ci-dessus:

$$q_1 = 3{,}2;\; q_2 = 8\,;\; q_3 = 17{,}6\,;\; q_4 = 40{,}6\,;\; q_5 = 48.$$

Cela posé, on a, sous la condition $g^2 < 4h$:

$$F(x) = f(x)\,(x^2-gx+h) = x^7 + (q_1-g)\,x^6 - (q_1g+q_2-h)\,x^5 + (q_1h+q_2g-q_3)\,x^4 -$$
$$-(q_2h-q_3g-q_4)\,x^3 - (q_3h+q_4g-q_5)\,x^2 + (q_4h-q_5g)x + q_5h = 0.$$

La condition de faire disparaître le terme en x^4 fournit l'égalité $q_1h+q_2g-q_3=0$. On a, en outre, les inégalités

$$q_1>g;\ q_1g+q_2>h;\ q_1h+q_2g>q_3;\ q_2h>q_3g+q_4;\ q_3h+q_4g>q_5;\ q_4h>q_5g.$$

Remplaçant les q_i par leurs valeurs ci-dessus, on a d'abord $h=\frac{17,6-8g}{3,2}$. On voit ensuite que la valeur de g doit être très petite, et qu'en prenant, par exemple, $g=0,075$, d'où $h=5,3111...$, toutes les conditions précitées sont satisfaites, ce qui donne pour l'équation cherchée

$$\varphi(x)=(x+1)\ (x+3)\ (x+3,2)\ (x^2-4x+5)\ (x^2-0,075x+5,311...)=$$

$$=x^7+3,125..x^6-2,929..x^5-0,57x^3-48,52x^2+212,03\,x+254,93=0.$$

2ème *Cas*. On peut attribuer à $\psi(x)$ les quatre racines imaginaires que $F(x)$ doit posséder, en prenant, par exemple,

$$\psi(x)=(x^2-4x+5)\ (x^2-0,07x+5,3)=x^4-4,07x^3+10,58x^2-21.54x+26,5;\ \text{puis}$$

$$f(x)=\psi(x)\ (x+1)=x^5-3,07x^4+6,51x^3-10,97x^2+4,95x+26,5,\ \text{et enfin}$$

$\varphi(x)=f(x)\ (x^2+gx+h)$, avec la condition $g^2>4h$, puisque, d'après l'énoncé, les deux racines à introduire doivent être réelles (et négatives).

On fera, par exemple, $g=6,2$, d'où, à cause de la condition d'égalité ci-dessus, $h=\frac{q_2g-q_3}{q_1}$, on aura $h=9,57$ et, par conséquent, $g^2>44$. On trouve enfin

$$\psi(x)=(x+1)\ (x+2,9)\ (x+3,3)\ \psi(x)=x^7+3,13x^6-2,954x^5-0,7x^3-47,89\,x^2+$$
$$+211,67x+253,605=0,$$

qui satisfait à toutes les conditions de la question.

XIV. Jusqu'ici il ne manquait qu'un seul terme dans l'équation dont le type était proposé. Nous allons, dans ce qui suit, supposer qu'il en manque deux.

Équations incomplètes, où il manque deux termes.

Les deux termes absents peuvent être consécutifs, ou non consécutifs. Dans ce dernier cas, ils peuvent être compris l'un et l'autre entre des termes de signes contraires, ou entre des termes de même signe; ou bien l'un d'eux peut être compris entre deux termes de même signe, et l'autre entre des termes de signes contraires.

Pour abréger, nous supposerons, quel que soit le cas dont il s'agisse, que l'équation démandée doive n'avoir que le plus petit nombre possible de racines imaginaires.

Dans tous le cas, l'obligation de faire disparaître deux termes donnant lieu à deux égalités, sans préjudice des inégalités auxquelles en doit satisfaire, on comprend qu'il ne suffirait plus, comme dans le cas où il ne manque à l'équation qu'un seul terme, de se réserver, à la fin de l'opération, deux indéterminées. Ce n'est donc plus un seul trinôme de la forme $(x^2 \pm cx \pm d)$, mais bien deux trinômes de cette forme qu'on aura à introduire, avec les conditions $c^2 <$ ou $> 4d$, selon les conditions d'imaginarité on de réalité des racines qui resteront à adjoindre. On aura donc à former préalablement une équation numérique auxiliaire, $f(x) = 0$, non plus, comme précédemment, du degré $m - 2$, mais bien du degré $m - 4$, dont les termes faisant suite au terme initial x^{m-4} auront les mêmes signes respectifs que ceux de l'équation proposée $F(x)$.

Quelques exemples suffiront pour faire bien comprendre la suite des opérations et les précautions qu'elles peuvent exiger.

XV. Supposons, en premier lieu, que la proposée soit

$$F(x) = x^7 - p_1x^6 + p_2x^5 + p_3x^2 - p_4x + p_5 = 0,$$

avec la condition que l'équation numérique $\varphi(x)$, qu'il s'agit de former, n'ait que les deux racines imaginaires qu'elle ne peut point ne pas avoir, et que les cinq autres soient réelles.

On prendra pour équation auxiliaire

$$f(x) = x^5 - r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 - r_4x + r_5 = 0,$$

avec la condition que toutes ses racines soient réelles, mais en ayant soin, conformément à la règle posée ci-dessus, d'en laisser deux indéterminées. En opérant comme il a été dit dans ce qui précède, on reconnaît qu'une solution est fournie par l'équation

$$f(x) = (x - 1)\ (x - 2)\ (x + 4)\ (x^2 - cx + d) = 0,$$

où l'on prendra $c^2 > 4d$, et qui possèdera, comme $F(x)$, quatre racines positives réelles et une négative. Comparant le produit avec l'équation $f(x)$ écrite ci-dessus, on trouve que les coefficients r_i ont les valeurs ci-après, savoir

$$r_1 = c - 1;\ r_2 = d - c - 10;\ r_3 = d + 10c + 8,\ r_4 = 10d + 8c;\ r_5 = 8d.$$

Introduisant enfin le facteur du second degré $(x^2 + ex + f)$, avec la condition $e^2 < 4f$, puisque les deux facteurs linéaires doivent être imaginaires, on trouve, pour le produit de $f(x)$ par ce trinôme :

$$\varphi(x) = x^7 - (r_1 - e)\,x^6 + (f - r_1 e + r_2)\,x^5 + (r_3 f - r_4 e + r_5)\,x^2 - (r_4 f - r_5 e)\,x + r_5 f = 0,$$

avec les conditions d'égalitè

$$r_1 f - r_2 e - r_3 = 0, \quad r_2 f + r_3 e - r_4 = 0,$$

et les conditions d'inégalité

$$e^2 < 4f;\ e < r_1;\ f > r_1 e - r_2;\ f > \frac{r_4 e - r_5}{r_3};\ f > \frac{r_5 e}{r_4}.$$

On reconnait avec un peu d'attention qu'on satisfait à toutes les conditions exigées, en prenant d'abord $c = 19$ et $d = 90$, d'où, en vertu des égalités ci-dessus,

$$e = \frac{1368}{8905} = 0{,}15362....;\quad f = \frac{147116}{8905} = 16{,}5206...$$

toutes les conditions sont satisfaites et l'on trouve pour l'équation demandée (en n'écrivant que les premières décimales des coefficients):

$$\varphi(x) = x^7 - 17{,}85x^6 + 74{,}8x^5 + 5020{,}4x^2 - 17271\ x + 11894 = 0,$$

qui, étant décomposée en ses facteurs. peut s'écrire

$$\varphi(x) = (x - 1)\ (x - 2)\ (x - 9)\ (x - 10)\ (x + 4)\ (x^2 + 0,\ 154..x + 16{,}521) = 0.$$

XVI Soit, comme second exemple, l'équation proposée

$$F(x) = x^7 - p_1 x^6 - p_2 x^4 + p_3 x^2 - p_4 x + p_5 = 0,$$

où il manque deux termes, compris l'un entre deux termes de même signe, l'autre entre deux termes de signes contraires, et sous la condition que l'équation numérique qu'il s'agit de former possède cinq racines réelles, dont quatre positives et une négative.

On formera préalablement, comme dans l'exemple qui précède, l'équation auxiliaire du 5ème degré

$$f(x) = (x - 1)\ (x - 2)\ (x + 4)\ (x^2 - cx + d) = 0,$$

avec la condition $c^2 > 4d$; cette équation sera, par conséquent, de l'espèce

$$f(x) = x^5 - r_1 x^4 + r_2 x^3 + r_3 x^2 - r_4 x + r_5 = 0, \quad \text{où l'on a}$$

$$r_1 = c - 1;\ r_2 = (d - c - 10);\ r_3 = (d + 10c + 8);\ r_4 = 10d + 8c;\ r_5 = 8d.$$

Introduisant alors le facteur $x^2 + ex + f$, avec la condition $e^2 < 4f$, il vient

$$\varphi(x) = x^7 - (r_1 - e)\, x^6 - (r_1 f - r_2 e - r_3)\ x^4 + (r_3 f - r_4 e + r_5)\, x^2 - (r_4 f - r_5 e)\, x + r_5 f = 0$$

avec les deux conditions d'égalité, résultant de l'annulation des coefficients de x^5 et x^3,

$$f - r_1 e + r_2 = 0, \quad r_2 f + r_3 e - r_4 = 0,$$

et les conditions d'inégalité

$$r_1 > e;\ r_1 f > r_2 e + r_3;\ r_3 f + r_5 > r_4 e;\ r_4 f > r_5 e.$$

On reconnait aisément que les valeurs $c = 10$, $d = 21$, entre autres, d'où l'on déduit, après les avoir introduites dans celles des r_i,

$$e = 2{,}108\ldots;\ f = 17{,}972\ldots,$$

satisfont à toutes les conditions proposées, et fournissent l'équation cherchée

$$\varphi(x) = x^7 - 6{,}89\ x^6 - 30{,}64 x^4 + 1875{,}07 x^2 - 4857{,}74\, x + 3019{,}3 =$$

$$= (x - 1)\ (x - 2)\ (x - 3)\ (x - 7)\ (x + 4)\ (x^2 + 2{,}108 x + 17{,}972) = 0.$$

etc. etc.

XVII. Ces exemples suffisent pour faire bien comprendre l'esprit de la méthode et la marche des opérations, et nous croyons inutile de les multiplier. Ils montrent aussi ce qu'on aurait à faire s'il manquait plus de deux termes, consécutifs ou non, dans l'équation proposée, mais en même temps ils font ressortir les difficultés, croissantes avec le nombre des termes absents, qu'on aurait à surmonter; car le nombre des quantités indétermi-

nées c, d; e, f; g, h; etc., qu'il faudra laisser figurer dans le produit final de l'équation auxiliaire $f(x)=0$ par les facteurs du second degré à introduire, ira lui-même en croissant, et la difficulté du calcul consistera à trouver les valeurs à leur attribuer, respectivement, de façon à satisfaire, d'une part à la conservation des signes des coefficients restants, d'autre part à l'annulation de ceux qui doivent disparaître, d'autre part enfin aux conditions de réalité ou d'imaginarité que, selon l'énoncé du problème, chacun d'eux doit introduire.

Nous ne croyons donc pas devoir nous y étendre davantage. Nous craignons plutôt le reproche d'avoir insisté trop longuement déja sur un point qui, après tout, est élémentaire dans la théorie des équations numériques.

Notre excuse est que ce point n'a jamais été traité, du moins à notre connaissance; qu'il nous paraît, par un certain côté, répandre un jour nouveau sur la Règle des signes de Descartes; qu'enfin, même dans les limites où nous en avons circonscrit l'étude, la solution des difficultés qui s'y rencontrent, et que nous développons, ne se présentait peut-être pas immédiatement.

Paris, 7 *avril* 1885.

E. De Jonquières.

NB. Questa memoria presentata dall'A. nella Sessione V. viene qui inserita per sollecitarne la pubblicazione.

INTORNO ALLA « BIBLIOTHECA MATHEMATICA » DEL D.r GUSTAVO ENESTRÖM

RAPPORTO

DI B. BONCOMPAGNI

Dal 1882 si pubblica in Stockholm, sotto la direzione del Sig. G. Mittag-Leffler, in fascicoli in 4.°, una raccolta intitolata « ACTA MATHEMATICA », della quale sono stati già pubblicati 4 volumi, cioè 16 fascicoli, ciascuno di tali volumi essendo composto di 4 fascicoli.

Come appendice a questa raccolta il Sig. D.r Gustavo Eneström ha cominciato a pubblicare, dal 1884 in poi, una raccolta bibliografica intitolata: « BIBLIOTHECA MATHEMATICA », della quale sono stati finora pubblicati 4 fascicoli formanti un volume intitolato « BIBLIOTHECA MATHEMATICA || HERAUSGEGEBEN || VON || » REDIGÉE || PAR || GUSTAF ENESTRÖM. || 1884. || STOCKHOLM || F. & G. BEIJER. || 1884. || » CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM. || BERLIN || MAYER & MULLER. || 38/39 FRANZÖSI- » SCHE-STRASSE || PARIS || A. HERMANN. || 8 RUE DE LA SORBONNE.||»; del qual volume ho l'onore di presentare all'Accademia da parte dell'Autore un esemplare.

Ciascuno di questi 4 fascicoli contiene 1.° un catalogo alfabetico di pubblicazioni relative alle scienze matematiche e fisiche, diviso in 3 sezioni, delle quali la prima è intitolata « WERKE, ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE. — » OUVRAGES, || MÉMOIRES ET NOTES », la seconda « REFERATE UND RECENSIONEN. || » COMPTES RENDUS ET ANALYSES », la terza « BENUTZTE SAMMELSCHRIFTEN. — RE- » CUEILS DÉPOUILLÉS. »; 2.° una nota storico-bibliografica intitolata « VER- » MISCHTE NOTIZEN. — MÉLANGES », e firmata « G. Eneström ». Queste note sono le seguenti:

1.° « Notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des » séries, publié à Stockholm en 1718 » (col. 15, lin. 14–35, col. 16, lin. 14–35, N° 1), contenente notizie intorno ad una rarissima edizione d'uno scritto di Cristiano Goldbach, nato in Königsberg nel giorno 18 di marzo 1690 (1), e morto nel giorno $\frac{20}{30}$ di novembre del 1764 (2), intitolata « *Spe-* » *cimen methodi ad summas serierum* », non menzionata dal Poggen-

(1) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ZUR GESCHICHTE || DER EXACTEN WISSENSCHAFTEN||ecc.||GESAMMELT||VON||J. C. POGGENDORFF||ecc.||ERSTER BAND.||A-L.||LEIPZIG, 1863. || VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH, col. 924, lin. 39—49 — Allgemeine || Deutsche Biographie.|| Neunter Band. || Geringsfald-Gruber. ||ecc. || Leipzig, || Verlag von Duncker & Humblot. || 1879, pag. 336, lin. 17.

(2) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc, || GESAMMELT || VON || J. C. POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A-L. || ecc., col. 924, lin. 39—50. — Allgemeine || Deutsche Biographie. || Neunter Band. || Geringswald-Gruber, ecc., pag. 330, lin. 18—19.

dorff (1) nell'articolo « Goldbach, Christian » del suo dizionario biografico in lingua tedesca.

2.° « Notice sur une nouvelle édition de Diofantos préparée par M. Paul » Tannery » (col. 47, lin. 15-38, col. 48, lin. 14-37, N° 2), contenente notizie intorno ad una edizione critica che il Sig. Tannery prepara, coll'appoggio del governo francese, degli scritti che si conservano di Diofanto, e che comprenderà il testo greco di questi scritti, accompagnato 1.° da una traduzione latina del testo medesimo, fatta adoperando le notazioni moderne; 2.° da un ampio comento; 3.° dal testo greco, tuttavia inedito, degli scolii attribuiti a Massimo Planude.

3. « Notice sur les versions latines des éléments d'Euclide publiées en Suède » (col. 79, lin. 5–42, col 80, lin. 5–42 N° 3), contenente notizie intorno a due traduzioni latine degli elementi di Euclide, omesse dal Sig. Vachtchenko-Zakhartchenko in un elenco bibliografico da lui pubblicato in Kiel nel 1880. Di queste due traduzioni, l'una dovuta a Martino Erici Gestrin, nato in Gefle nel giorno 16 di febbraio del 1594 (2), e morto in Upsala nel giorno 27 di settembre del 1648 (3), fu data in luce in una edizione intitolata nel suo frontispizio « MARTINI E. GESTRINII || IN || GEOMETRIAM EUCLIDIS || Demonstra» tionum || LIBRI SEX. In quibus GEOMETRIA planorum traditur, & brevibus » NOTIS perspicuè || explicatur. Impensis & sumptibus AUTHORIS, || UPSA» LIÆ, Excudebat Æschillus Matthiæ, Academiæ Typog. || ANNO CHRISTI || » clↄ.lↄc.xxxVII. » (4); l'altra dovuta a Samuele Klingenstjerna, nato in Tollefors presso Linkjöping nel giorno 18 di agosto 1698 (5), e morto in Stockholm nel giorno 26 di ottobre 1765 (6), è intitolata « EUCLIDIS || ELEMENTORUM || LIBRI » SEX PRIORES || UNA CUM || UNDECIMO || ET || DUODECIMO. || UPSALIÆ, Typis Viduæ » b. HÖJERI », senz'anno, ma stampata circa il 1741 (7).

---

(1) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc. || GESAMMELT || VON || J. C. POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A.-L. || ecc., col. 924. lin. 39—59, col. 925, lin. 1—3.

(2) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc. || GESAMMELT || VON || J. C. POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A-L. || ecc., col. 889, lin. 8—10.

(3) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc. || GESAMMELT || VON || J. C. POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A-L. || ecc., col. 889, lin. 8—11.

(4) BIBLIOTHECA MATHEMATICA, ecc., N° 3, col. 79, lin. 25—31. — In una ristampa di questo frontispizio, citata dal Sig. Eneström (BIBLIOTHECA MATHEMATICA, ecc., col. 79, lin. 37—42, col. 80, lin. 4—8) in vece di « clↄ lↄc xxxVII », trovasi (BIBLIOTHECA MATHEMATICA, ecc., col. 80, lin. 5) « clↄ. lↄc. xxxxII ».

(5) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc. || GESAMMELT || VON || J. C. POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A-L. || ecc., col. 1272, lin. 33—45.

(6) Fortsetzung und Ergänzungen || zu || Christian Gottlieb Jöchers || allgemeinem || Gelehrten-Lexiko || worin || die Schriftsteller aller Stände nach ihren vornehmsten Lebensumständen || und Schriften beschrieben werden. || Angefangen von || Johann Christoph Adelung || und vom || Buchstaben K fortgesetzt || von || Heinrich Wilhelm Rotermund, || Pastor an der Domkirche zu Bremen. || Dritter Band. || Delmenhorst. || gedruckt bey Georg Jöntzen. || 1810, col. 504, lin. 25—49. — BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc. || GESAMMELT || VON || J. C. || POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A-C., ecc., col. 1272, lin. 33—46.

(7) BIBLIOTHECA MATHEMATICA, ecc., N° 3, col. 80, lin. 14—32.

4.° « Notice sur les premières tables de logarithmes publiées en Suède » (col. 121, lin. 24–45, col. 122, lin. 24–45, col. 123–124, N° 4), contenente una recensione di una memoria del Sig. Prof. David Bierens de Haan intitolata *Tweede Ontwerp eener naamlijst van logarithmentafels*, pubblicata nel 1875 nel tomo 14 dei Verhandlingen der Akademie van Wetenschappen di Amsterdam, nella quale si dà un elenco delle tavole di logaritmi venute in luce del 1614 al 1874. In questo elenco il Sig. Bierens de Haan menziona 10 tavole di logaritmi stampate in Svezia dal 1763 in poi. (1)

Il Sig. Eneström avverte (2) per altro che le prime tavole di logaritmi stampate in Isvezia furono pubblicate nel 1698 da Pietro Elvius, nato in Dalarne nel giorno 24 di settembre del 1660 (2), e morto in Upsala nel giorno 12 di gennaio del 1718 (3) in una edizione intitolata: « TABULA || Compendiosa » Logarithmorum || SINUUM || Ad quadrantis gradus, eorumq; partes decimas, || » Nec non || NUMERORUM ABSO-||LUTORUM ab unitate ad 1000, || Edita a P. E. || » Upsaliæ 1698 ».

I 4 fascicoli finora pubblicati della detta « BIBLIOTHECA MATHEMATICA » contengono una indicazione di 918 scritti pubblicati in 12 lingue, cioè 325 in francese, 315 in tedesco, 104 in inglese, 79 in italiano, 36 in lingue scandinave, 27 in russo, 16 in neerlandese, 6 in spagnuolo, 4 in latino ed in greco, 4 in portoghese, 1 in polacco ed 1 in boemo.

Quindi è certo che continuandosi la pubblicazione di questa importante raccolta, essa gioverà molto a far conoscere i lavori che si dànno in luce intorno alle scienze matematiche e fisiche.

B. BONCOMPAGNI.

---

(1) BIBLIOTHECA MATHEMATICA || ecc., N° 4, col. 121, lin. 32—35.
(2) BIBLIOTHECA MATHEMATICA || ecc., N° 4, col. 121, lin. 36—40.
(3) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc. || GESAMMELT || VON J. C. POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A-L. || ecc., col. 661, lin. 43—46.
(4) BIOGRAPHISCH-LITERARISCHES || HANDWÖRTERBUCH || ecc. || GESAMMELT || VON || J. C. POGGENDORFF || ecc. || ERSTER BAND. || A-L. || ecc., col. 661, lin. 43—47.

BRANO DI LETTERA INDIRIZZATA DAL PROF. GIOVANNI LUVINI

A B. BONCOMPAGNI

in data di « Torino 5 Gennaio 1885. »

« Le ho spedito per la posta due o tre giorni fa le due copie de'miei *Sette Studi* annunziatele nella mia del 29 scorso Xbre. Questi miei studi furono tutti, meno l'ultimo, redatti e pubblicati per la prima volta nel 1884; anzi il secondo ed il sesto non furono mai pubblicati prima d'ora.

» Nel primo, sullo stato sferoidale, io ho dimostrato sperimentalmente prima e razionalmente poi, che la temperatura dei liquidi sferoidali è poco differente da quella della loro ebollizione corrispondente alla pressione attuale. Con questo principio, nuovo nella scienza, riuscii a far gelare l'acqua nell'etere sferoidale in un vaso ardente nel vuoto. Cercai di dilucidare alcuni punti oscuri della storia relativa a questo stato, e feci conoscere il curioso fenomeno delle bolle soffiate sui liquidi sferoidali e sullo stesso etere infiammato.

» Nel secondo, sulle esplosioni delle caldaie, ho citato i principali sperimenti dei fisici intorno all'ebollizione ed al surriscaldamento dell'acqua, e specialmente quelli di Bellani, pubblicati fin dal 1809 nel *Giornale di Fisica* di Pavia ed intieramente dimenticati da tutti i dotti, in causa della poca o nessuna pubblicità che venne data a quel giornale, di cui non ho potuto trovare copia a Torino, ed ho dovuto servirmi dell'analisi che fece del lavoro di Bellani il Belli nel suo *Corso elementare di Fisica sperimentale*. Descrivo i rimedi prima d'ora proposti dai fisici per evitare le esplosioni dovute al surriscaldamento, e ne aggiungo uno mio intieramente nuovo.

» Nel terzo, sulle trombe atmosferiche, riferisco le osservazioni di Spallanzani sulle trombe in genere e sui vortici aerei al di sopra delle nubi temporalesche; faccio conoscere la teoria di Franklin delle trombe, come pure quella dei venti per aspirazione, e la polemica ch'egli ha avuto con Perkins e con Colden, i quali dimostrarono contro Franklin che le trombe non sono ascendenti, come questi voleva, ma discendenti. Riporto le riflessioni fatte intorno a queste mie ricerche storiche dal signor Faye nei *Comptes Rendus* dell'Accad. delle Sc. di Parigi (Seduta del 18 feb. 1884). In esse l'illustre accademico spiega in modo evidente l'inammissibilità dei venti d'aspirazione e la causa che trasse Franklin in errore.

» Nel quarto, sopra un modo di formazione della grandine, faccio dipendere la formazione di questa meteora dallo stato sferoidale delle gocce acquee sospese nell'aria e colpite dal fulmine. Chi ha ben capito la teoria dello stato sferoidale, che io ho dato nel 1° Studio, ammetterà facilmente la ragionevolezza di questo modo di formazione.

» Nel quinto, sull'elettricità dell'aria, ecc., do una teoria intieramente nuova dell'elettrizzazione dell'aria, delle nubi temporalesche e delle ceneri vulcaniche, fondata sull'esperienze di Faraday e sulle osservazioni di queste meteore. Tale elettricità è generata dallo strofinìo dell'aria umida coi ghiacciuoli che sempre si trovano nelle regioni elevate dell'atmosfera, o colle ceneri lanciate dai vulcani. Dimostro che l'aria umida e le nubi non sono conduttori elettrici, che i temporali nascono dalla discesa dei ghiacciuoli freddissimi trascinati dai vortici discendenti nei cumuli di vapori sottostanti. Il fulmine solca in tutti i sensi la nube temporalesca senza uscirne, e non si slancia da una nube su di un'altra o da una nube sulla terra, senza circostanze particolari.

» Nel sesto, sulla rifrazione atmosferica laterale, dopo di aver richiamato alla memoria tre miei lavori precedenti relativi alle osservazioni della rifrazione atmosferica col *dieteroscopio*, strumento che io proposi per questo scopo, riferisco alcune considerazioni fatte da illustri scienziati intorno al mio metodo, e le faccio seguire da alcune mie riflessioni e risposte. Quindi espongo i risultati delle mie osservazioni dieteroscopiche, dalle quali risulta un effetto evidente di rifrazione laterale periodica diurna, e spiego la causa principale delle variazioni della rifrazione atmosferica presso l'orizzonte.

» Il settimo studio, riferibile all'adesione tra solidi e liquidi, è di data anteriore ai precedenti, essendo stato pubblicato la prima volta negli Atti dell'Accad. delle Sc. di Torino del 1870. Esso contiene una proposizione, dimostrata per la prima volta sperimentalmente, relativa alla resistenza che incontrano i solidi nello scorrimento sulla superficie o nell'interno dei liquidi. Plateau, facendo oscillare un ago magnetico, prima colla faccia inferiore in contatto coll'acqua, e poi tutto immerso in questa, fu meravigliato di trovare la durata d'oscillazione più corta nel secondo caso che non nel primo. Egualmente l'ago oscilla più lentamente sulla glicerina e su diversi altri liquidi, che non nel loro interno. Coll'alcool invece, coll'olio d'oliva, ecc., avviene l'opposto. Le mie sperienze hanno fatto vedere che la resistenza in quistione va distinta in due specie: *superficiale* e *lineare*; se il corpo oscillante è tutto nell'interno del liquido, si manifesta la sola resistenza superficiale; se invece si appoggia sulla faccia del liquido, essa è superficiale insieme e lineare, colla quale distinzione si spiegano in modo naturalissimo risultati in apparenza contradditorii. »

COMUNICAZIONI

Foglini, P. G. – *Presentazione di una sua nota*:

Il P. Giacomo Foglini presentò una sua nota sopra l'applicazione delle coordinate omogenee alla Geometria superiore, in continuazione e complemento di un'altra somigliante nota già pubblicata e ristretta alle sole linee del primo e del secondo ordine. Questa nota trovasi inserita nel Vol. I delle Memorie.

De Rossi, Prof. M. S. – *Sugli odierni terremoti di Spagna*:

Il Prof. M. S. De Rossi fu pregato dai presenti a prender la parola per dare notizie scientifiche sugli odierni disastri sismici, che funestano la Spagna meridionale. Egli, rispondendo al gentile invito, dichiarò esser difficile formolare giudizi precisi ed analizzare i fatti del grandioso fenomeno, perchè mancano tuttora i sufficienti ragguagli scientifici. Il R. Governo Spagnolo ha nominato una Commissione di geologi per lo studio del fenomeno; e questa si è già rivolta al riferente per ciò che riguarda la organizzazione delle osservazioni; crede perciò il riferente che si debba attendere il lavoro della detta Commissione, prima di voler addentrarsi nell'analisi di un fenomeno sismico tanto straordinario. Ciò posto il riferente passò in breve disamina tutto ciò che poteva raccogliersi dalle notizie finora sparse nei giornali e nei cenni doti da qualche scienziato all'Accademia di Parigi. Mostrò sulla carta geologica della Spagna compilata dal De Verneuil e Collomb la zona urtata, additando come ad evidenza il radiante sismico odierno coincida con una grande linea di frattura nella zona coperta dai terreni terziari pliocenici e miocenici. La detta zona non manca di qualche centro vulcanico e di affioramenti di rocce eruttive ed evidentemente si prolunga nelle isole Baleari, come giustamente fu già notato all'Accademia di Parigi, Il riferente aggiunse non essere senza importanza il notare che il prolungamento del radiante sismico suddetto dopo le isole Baleari, passando per lo stretto fra la Sardegna e la Corsica, si dirige sull'Italia centrale fra il Lazio e l'Umbria e gli Abbruzzi e le Marche. Ora è evidente specialmente dagli studì pobblicati dal Galli sulle osservazioni da lui fatti nell'Osservatorio di Velletri e da altri dati, che appunto questa regione dell'Italia ha maggiormente corrisposto per l'agitazione sismica col periodo degli scuotimenti che avvengono nella Spagna. Il terremoto principale della sera del 25 Dicembre fu registrato dagli strumenti, massime di

Velletri e di Roma ed anche di Moncalieri. Aggiunse inoltre esser notevole una simile corrispondenza di periodo sismico fra le medesime regioni del Lazio e della Spagna meridionale essere avvenuta in un modo manifesto in questo medesimo secolo nel 1829, allorchè il vulcano laziale nella regione specialmente di Albano si scosse fortemente e lungamente minacciando qualche disastro, che fortunatamente si limitò a sole lesioni nei fabbricati. Anche ai nostri giorni dopo sorti i nuovi studi sismologici in Italia dal 1873 in poi, si è più volte verificata una simile coincidenza in periodi sismici, quantunque di minima importanza. Chiamò pure l'attenzione degli adunati sulle evidenti relazioni fra i terremoti, che fin dal Novembre agitarono ripetutamente le Alpi Cozie, e questi disastrosi di Spagna. Dal tutto insieme conchiuse che nella odierna recrudescenza generale dei fenomeni sismici vieppiù si conferma ciò che altra volta ha egli dimostrato, esser cioè tutto il bacino del Mediterraneo collegato in un sistema di azioni endogene aventi fra loro mutue influenze, le cui leggi precise non potranno essere scoperte che in progresso di tempo con la moltiplicazione delle osservazioni geodinamiche.

Lais, P. G. – *Presentazione di opuscoli*:

Il ch. P. Giuseppe Lais presentò da parte del Prof. Domenico Ragona socio corrispondente un opuscolo del medesimo intitolato: « Sulla pioggia in montagna » diè un cenno del contenuto, facendone rilevare la novità e l'importanza delle conclusioni, alle quali l'autore è pervenuto. Presentò inoltre un suo opuscolo col titolo: « La luce crepuscolare dell'anno 1884 ».

Bonetti, Prof. F. – *Presentazione di una sua nota*:

Il ch. Sig. D. Filippo Bonetti presentò una sua Nota a stampa col titolo: « Ricerche sperimentali sulla variazione della densità dell'acqua tra 0° e 10°. ».

D. B. Boncompagni – *Presentazione di pubblicazioni*:

D. B. Boncompagni presenta, da parte del Sig. Prof. Giovanni Luvini, un esemplare di ciascuna delle pubblicazioni seguenti: SEPT ÉTUDES || SUR || 1° L'état sphéroidal; || 2° Les explosions des machines à vapeur; || 3° Les trombes; || 4° La grêle; || 5° L'électricité atmosphérique; || 6° La réfraction latérale; || 7° L'adhésion entre les liquides et les solides; || en double original, français et italien || Par l'Ingénieur Jean luvini || Professeur de physique à Turin. || TURIN || IMPRIMERIE ROUX ET FAVALE. || 1884. – SETTE STUDI || SOPRA || 1° Lo stato sferoidale; || 2° Le esplosioni delle macchine a vapore; || 3° Le

trombe; || 4° La grandine; || 5° L'elettricità atmosferica; || 6° La rifrazione laterale; || 7° L'adesione tra solidi e liquidi; || in doppio originale italiano e francese || Per l'ingegnere GIOVANNI LUVINI || Professore di Fisica a Torino. || TORINO || TIPOGRAFIA ROUX E FAVALE || 1874.

DI || UN NUOVO STRUMENTO METEOROLOGICO-GEODETICO-ASTRONOMICO || IL DIETEROSCOPIO || DI || GIOVANNI LUVINI || PROFESSORE DI FISICA NELLA R. ACCADEMIA MILITARE || STAMPERIA REALE DI TORINO || DI G. B. PARAVIA E C. || 1874.

DEL || DIETEROSCOPIO || SECONDA COMUNICAZIONE || DI || GIOVANNI LUVINI || PROFESSORE DI FISICA || NELLA R. ACCADEMIA MILITARE || STAMPERIA REALE DI TORINO || DI G. B. PARAVIA E C. 1874.

PRESENTAZIONE || DI UN || MODELLO DI DIETEROSCOPIO || ad uso || DELLE SCUOLE DI FISICA E DI GEODESIA || DESCRIZIONE ED APPLICAZIONE DEL MEDESIMO || TERZA COMUNICAZIONE || DI || GIOVANNI LUVINI || PROFESSORE DI FISICA ALL'ACCADEMIA MILITARE DI TORINO || STAMPERIA REALE DI TORINO || DI G. B. PARAVIA E COMP. 1876.

Presenta anche un esemplare dei fascicoli di Gennaio, Febbraio, Marzo e Aprile del BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE.

DE ROSSI, Prof. M. S. – *Presentazione di un opuscolo*:

Il Segretario presenta da parte del socio corrispondente Sig. E. De Jonquières una sua nota a stampa intitolata: « *Sur la règle de Newton* (*démontrée par* M. Sylvester) *pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations numériques* ».

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Lettera del socio corrispondente Prof. G. Meneghini in ringraziamento degli augurii a lui fatti dal Corpo accademico in occasione del suo cinquantesimo anniversario d'insegnamento.

2. Lettera del Sig. A. d' Abbadie in ringraziamento per la nomina a socio corrispondente.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – P. G. Foglini. – Prof. M. Azzarelli. – P. G. Lais. – P. F. S. Provenzali. – Prof. G. Tuccimei. – D. B. Boncompagni.

AGGIUNTI: March. L. Fonti. – Prof. D. F. Bonetti.

L'Accademia apertasi legalmente alle ore 2 1/2 p. venne chiusa alle 4 1/2 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85, — Serie IV — Rendiconti — Vol. I. — Fasc. 1, 2, 3. — Roma, 1884, in-4°
2. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* — T. II. — Serie VI. — disp. 10. Venezia, 1883—84, in-8°
3. BACHMETIEFF (B. E.) — *Meteorologische Beobachtugen, etc.*, Moskau, 1884. In-4.°
4. BOCCALI (G.) — *Doppio cubo ed altre nuove scoperte geometriche in una semplice spirale poligona.* Camerino, 1884. In-8.°
5. BONETTI (F.) — *Ricerche sperimentali sulla variazione di densità dell'acqua tra* 0° *e* 10°. (Estratto dal Vol. VIII, Serie 3ª, Transunti della R. Accad. dei Lincei).
6. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1883. — n° 4. — Moscou, 1884. In-8°
7. *Crónica cientifica.* — A. VII. N. 162. — Barcelona, 1884. In-8.°
8. DE JONQUIÈRES. — *Sur la règle de Newton (démontrée par M. Sylvester), pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations numériques (Extrait des* Comptes rendus des séances de l'Académie de sciences, T. XCIX, séances des 14, 21 et 28 juillet 1884). Paris 1884. In-4.°
9. ENESTROM (G.) — *Bibliotheca Mathematica.* 1884. Stockholm, 1884, In-4.°
10. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVI. — n° 9. — St. Pétersbourg, 1884, in-8°
11. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, Serie XII, Vol. IX. — quad. 829, 830. — Firenze, 1885, in-8.°
12. LAIS (P. G.) — *La luce crepuscolare dell'anno* 1884. — Napoli, 1884. In-16.°
13. LUVINI (G.) — *Sette studi, ecc.*, — Torino, 1884. In-8°.
14. —— *Di un nuovo strumento meteorologico-geodetico-astronomico* IL DIETEROSCOPIO. — Torino, 1874. In-8-°
15. —— *Del Dieteroscopio.* — Seconda Comunicazione. — Torino, 1874. In-8.°
16. —— *Presentazione di un modello di Dieteroscopio.* — Terza Comunicazione. — Torino, 1876. In-8.°
17. RAGONA (D.) — *Sulla pioggia in montagna.* — Modena, 1884. In-8° p.°
18. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — Décembre 1884.
19. —— *Partie technique.* — Décembre 1884. — Paris, 1884, in-8°
20. TRAVAGLINI (T.) — *Il sacro volume biblico tradotto e commentato secondo la mente della Chiesa Cattolica.* — Vasto, 1884. In-4.°

# ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE III^a DEL 22 FEBBRAIO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ALCUNE RIFLESSIONI SULL'AZIONE LITONTRITICA DELL'ACQUA DI FIUGGI.

NOTA

DEL PROF. AUGUSTO STATUTI

Dopo l'ultima mia memoria sull'acqua Anticolana di Fiuggi (1) l'egregio Cav. D.r G. Morfino che da molti anni disimpegna con generale soddisfazione la condotta Medico-Chirurgica di quel Comune, pubblicava nell'Aprile 1884 pei tipi dello Sgariglia in Foligno una sua erudita ed interessante monografia sopra quell'acqua salutare.

D'appresso questa pubblicazione la Civiltà Cattolica nel suo fascicolo N. 846 del 19 Settembre 1885 sotto la rubrica « Scienze Naturali » dedicava un suo lungo e forbito articolo a quest'acqua, commendandone le sue virtù antilitiache *contro i mali di pietra e di renelle*, e dopo aver esposto alcuni giusti criteri sulla differenza che deve necessariamente intercedere nell'azione in genere delle acque minerali all' interno od all'esterno dell'organismo, citava altresì alcuni esperimenti fatti dal sullod. Prof. sopra la solubilità dei cal-

(1) Di alcune recenti esperienze sull'acqua antilitiaca di Anticoli (Campagna) denominata di Fiuggi. Memoria presentata e letta nella Sessione II del 20 Gennaio 1884 dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei.

coli di acido urico e di ossalato di calce immersi nella sud. acqua *allo stato naturale*, aggiungendo che *nessun' altra acqua che si conosca possiede egual proprietà* (contro i detti mali) *se non quella tanto rinomata di Vichy e forse cotesta nostra supera di lunga mano la sua emula* ».

Nel Decembre dell'anno decorso la prelodata Civiltà Cattolica nel suo quaderno Num° 852 tornò ad intrattenersi di quest'acqua per informare i suoi lettori, che pur accordando piena fede all'operato del Morfino, essendosi essa (forse taluno dei suoi redattori o collaboratori) provata di ripetere l'esperimento eseguito dal med.° col tenere immerso per la durata di trenta giorni un calcolo di ossalato di calce in un piccolo vaso contenente dell'acqua di Fiuggi, non ne ebbe in sostanza verun risultato, laddove avendo lasciato immerso per altrettanto tempo un simil calcolo di ossalato nell'acqua mefitica di Collalli, lo trovò completamente disciolto.

In presenza di questa comunicazione che a primo aspetto tenderebbe ad infirmare l'importanza di quella virtù dissolvente che è stata ripetutamente osservata nell'acqua di Fiuggi, nell'*interesse unicamente della scienza* mi permetto di far seguito al suindicato articolo con alcune brevi considerazioni.

E pria d'ogni altro devo confessare di non aver saputo veramente comprendere a quale scopo la rispettabile Direzione del succitato periodico abbia inteso rendere di pubblica ragione quel suo esperimento, ritenuto, per quanto almeno può arguirsi dal contesto del suddetto articolo, che essa medesima sia ben altro che sicura dell'esattezza del suo operato, come si rileva dal periodo seguente: «. Non ci fermiamo a discutere su questa esperienza, » nè abbiamo intenzione di ripeterla con tutto l'apparato di misure e di » riscontri NECESSARI a chi vuol sciogliere definitivamente una questione ».

Ma allora a che prò pubblicare il risultato di un esperimento eseguito in condizioni tali che lungi dal contribuire ad un definitivo scioglimento della questione tendono invece ad intralciarla maggiormente? A che prò insinuare oggi in certo qual modo e sia pure indirettamente una tal qual diffidenza sull'operosità dell'acqua di Fiuggi dopo averla nel precedente fascicolo Num.° 846 del Settembre 1885 encomiata e consigliata come un farmaco salutare?

Ma ciò che vi è di più rimarchevole nella succitata comunicazione della *Civiltà Cattolica* si è che mentre essa assicura di aver verificato una notevole diminuzione in un calcolo di ossalato di calce sottoposto all'azione dell'acqua naturale di Collalli, per converso il Prof. Cav. Gioachino Taddei che analizzò ed illustrò scientificamente quest'acqua minerale con una sua

dettagliata memoria pubblicata nel 1864 (1), mentre la proclama efficacissima nelle concrezioni di *acido urico* le niega assolutamente ogni virtù medicamentosa appunto sui calcoli di *ossalato di calce*!

Ecco infatti come si esprime in proposito il menzionato Prof. Taddei.

« Egli è qui d'avvertirsi che se io pronosticava come litontrittica l'acqua
» di Collalli, ciò faceva razionalmente in sequela del carbonato di soda che
» per l'analisi vi aveva rinvenuto, ed in riflesso dell'azione che esercitano
» gli alcali fissi solubili o i loro carbonati sull'acido urico che nell'economia
» animale s'ingenera.

» Con che io voglio esprimere non doversi la qualificazione di anticalcolosa, da me data all'acqua in questione, riferire alle concrezioni in genere delle vie orinarie, ma solo limitare a quelle formate da acido urico
» o da urati, le quali sono le più frequenti. Onde è che se l'acqua di che
» si tratta riesce proficua nella renella e nei calcoli negli individui che
» vanno soggetti alla diatesi urica, *non più razionalmente* sarebbe da ritenersi e preconizzarsi come giovevole, quando le concrezioni anzidette,
» prodottesi nella pelvi dei reni, negli ureteri od in vescica fossero costituite, come talvolta lo sono, da fosfato di calce, *da ossalato calcareo* o
» da fosfato doppio d'ossido di ammonio e di magnesia. »

Dopo quest'esplicita dichiarazione del nominato Prof. Taddei i cui studi speciali sopra la detta acqua formano tuttora per dir così il fondamento e la base delle cure che con essa si eseguiscono nelle malattie delle vie orinarie, e dopo il fatto dei medesimi proprietari della ridetta acqua, i quali negli schiarimenti a stampa con cui sogliono accompagnare le loro bottiglie, si limitano a proclamarla d'impareggiabile utilità nelle *renelle e calcoli formati di acido urico*, la benemerita *Civiltà Cattolica* mi accorderà, lo spero, che alla mia volta anch'io mi limiti per lo meno a fare le più ample riserve sull'attendibilità delle sue esperienze, alle quali del resto, come già dissi di sopra, essa medesima non sembra attaccare una seria importanza.

Vero è che il nominato Periodico a porre in certo modo in accordo il risultato negativo del suo esperimento fatto coll'acqua di Fiuggi sopra un calcolo di ossalato di calce con quello positivo ottenuto dal Dott. Morfino sopra una simile materia, (2) nel chiudere il suo articolo del Dicembre 1885

(1) Acqua mefitico-alcalina di Collalli illustrata dall'esposizione dell'analisi chimica del Cav. Prof. Gioachino Taddei e dall'indicazione delle sue principali proprietà mediche. Firenze, Tip. Birindelli 1864.

(2) È bene a sapersi che mentre l'acqua di Collalli che allo stato naturale, secondo che ci ha informati la *Civiltà Cattolica*, sarebbe in grado di sciogliere i calcoli di ossalato contro l'au-

N.º 832 ricorse dubitativamente al caso della *diversa efficacia che ha un'acqua minerale attinta di fresco dalla sorgente o trasportata lungi da essa e tenuta in serbo*; ed è appunto questo concetto che io credo qui opportuno di chiarire convenientemente.

Innanzi tutto però devo premettere che io non ho, nè posso avere, motivo alcuno per denigrare le virtù terapeutiche dell'acqua di Collalli che io stesso anzi citai in una mia precedente memoria (1) tra le acque minerali indicate per la cura delle affezioni calcolose; dappoichè secondo che già dissi altra volta in proposito della tanto decantata acqua anticalcolosa di Evian nello Sciablese (2), non fu nè è mio intendimento, (nè tampoco può essere della mia competenza), d'istituire raffronti sulla maggiore efficacia di una o di altra acqua litontritica.

In secondo luogo poi desidero altresì sia ben inteso, che quantunque l'esperimento sulla solubilità dell'ossalato di calce immerso in una *limitata quantità d'acqua naturale di Fiuggi* sia stato eseguito dal Dott. Morfino senza veruna mia cooperazione od ingerenza (3) tuttavia conoscendo la somma perizia e quel che più monta la non comune onestà del sullodato dottore, io credo non possa esservi alcuna ragione speciale per impugnarne i risultati; opinione che d'altronde sembrami in sostanza divisa anche dalla stessa *Civiltà Cattolica*.

Ciò premesso e ritenuto, come è notissimo, che l'acqua alcalina di Fiuggi essendo affatto limpida, senza verun sapore ed odore particolare, si può

torità in certo modo del Prof. Taddei, il quale come ho già detto, le ricusa qualsiasi azione sulle malattie dipendenti dai detti calcoli; per converso il Prof. Scalzi ritiene che l'Acqua di Fiuggi possa avere una efficacia medicamentosa *anche sui calcoli ossalici*, i quali appunto a parere della nominata *Civiltà Cattolica*, non sarebbero affatto attaccati dalla ridetta acqua allo stato naturale.

(1) Nuove osservazioni sulle sorgenti dell'acqua antilitiaca di Anticoli (Campagna) denominata di Fiuggi. Roma, 1883.

(2) Memoria citata nella nota Num. 1.

(3) Ho detto che l'esperimento sulla solubilità dei calcoli di ossalato immersi in piccola quantità di acqua fu eseguito esclusivamente dal Morfino, che nè dette ragguaglio nella citata sua opera a pag. 16; ma giova avvertire che il fatto della facoltà dissolvente di cui è dotata questa acqua anche sopra simili concrezioni era stato già in precedenza amplamente constatato all'appoggio di altre formali e rigorose esperienze eseguite peraltro sulle stesse scaturigini. Ma poichè le condizioni di questi esperimenti fatti alle sorgenti, sia per la durata dell'immersione dei solidi, sia per la diversa quantità del liquido usato, evidentemente non furono identiche con quelle dell'esperimento fatto dal Morfino (ripetuto recentemente dalla Civiltà Cattolica) non sarebbe stato del caso d'invocare qui le risultanze dei primi a comprova di quelle dei secondi: lo che peraltro non esclude che indipendentemente anche da questi ultimi esperimenti possa ritenersi ormai come accertato che *l'acqua* di Fiuggi può esercitare allo stato naturale *un' azione fondente anche sugli ossalati*.

facilmente confondere con qualsiasi altra acqua comune potabile purchè di buona qualità, parmi non sarebbe fuor di luogo nel caso il dubitare che la supposta acqua di Fiuggi, di cui si valse la Civiltà Cattolica per porvi in immersione il calcolo di ossalato, invece di essere proveniente da quella sorgente, fosse stata invece un'acqua comune qualsiasi od anche, se così vogliasi, un'acqua di Fiuggi diluita alla n^{esima} potenza con altra acqua ordinaria!

Non intendo con ciò di spargere il benchè minimo dubbio sulla genuinità dell'acqua di Fiuggi che si trova in commercio nei diversi depositi esistenti in varie città d'Italia, alcuni fra i quali mi consta che se ne provvedono direttamente e come suol dirsi di prima mano, facendola attingere alla stessa sorgente; purnondimeno trattandosi di dover ragionare sopra un esperimento eseguito con una data acqua, sembrami che anzi tutto si possa e si debba esigere una piena sicurezza sulla provenienza della medesima dalla sorgente da cui prende il nome. Ma ammesso pure che l'acqua usata nell'esperimento fatto (forse a Firenze?) dalla Civiltà Cattolica fosse realmente acqua naturale di Fiuggi, ed ammesso altresì che la concrezione di ossalato in essa trattenuta per parecchi giorni, non abbia presentato alcun segno di diminuzione, come per contrario ebbe ad osservarlo il dottor Morfino usando sopra luogo ossia in Anticoli stesso la medesima acqua, egli è evidente che per conciliare questi due fatti solo in apparenza contradittori non potrebbe ricorrersi, per quanto almeno io ne penso, ad altra soluzione plausibile che non fosse quella di accettare, come una realtà positiva, quanto la *Civiltà Cattolica* accennò meramente in via di dubbio e cioè che l'azione spiegata dall'acqua di Fiuggi sulle concrezioni calcolose debba ritenersi tanto più energica, quanto più l'acqua è di fresca provenienza, ossia quanto più di recente è stata attinta dal luogo in cui scaturisce. Ora, in quanto a me, non esito dichiarare che per molte ragioni, sulle quali mi dispenso qui d'intrattenermi, io sono talmente persuaso di questo principio che non dubitai già asseverarlo nei miei precedenti scritti sopra quest'acqua, appoggiandomi a diverse autorità di valentissimi Idrologi ed in ispecie a quella del Prof. Chimenti che più particolarmente si occupò della nostra acqua di Fiuggi (1). A queste devo ora aggiungere quella dello stesso prelodato Dott. Morfino, riferendomi a quanto esso saviamente volle indicato negli articoli 8° e 9° delle sue istruzioni terapeutiche poste in fine del ricordato suo lavoro sul-

(1) Dell'acqua di Anticoli detta di Fiuggi. Osservazioni pratiche del Dott. Francesco Chimenti. Roma 1863.

l'acqua in parola, lavoro che come dissi in altra occasione, formò già il soggetto di parecchie riviste scientifiche, nelle quali fu unanimemente e meritamente commendato.

Sono ben lungi dall'inferire da ciò che l'acqua di Fiuggi esportata che sia, particolarmente poi se imbottigliata e turata a dovere sopra luogo, e bevuta a domicilio non conservi un'efficacia singolare per la cura in ispecie della diatesi urica e sue manifestazioni; dappoichè il fatto del non lieve annuale consumo che se ne fa in varie città d'Italia, in Roma stessa e perfino all'estero è per me una prova sicura che coloro i quali ne usano devono trovarvi per lo meno un sensibile lenimento alle loro sofferenze; peraltro non è egli men vero che ove i suddetti malati potessero e volessero eseguire le loro cure sopra luogo ed a stagione opportuna ben maggiori sarebbero i vantaggi che potrebbero ripromettersi dall'uso di quest'acqua ingerita presso la sorgente medesima.

Del resto sarebbe superfluo qui ripetere quanto più volte ho già avuto occasione di dichiarare, d'accordo in ciò pienamente coll'opinione della ripetuta *Civiltà Cattolica*, con quella del Morfino e dirò pure di tutti gli scienziati e cioè che non si deve congetturare in modo assoluto dall'effetto che quest'acqua produce nel suo stato naturale sopra i materiali in essa immersi per modo di saggio e per esperimento da gabinetto, quello che può produrre nel corpo umano sui calcoli orinari. Non pertanto a miglior intelligenza della questione ed affinchè questa non corra pericolo di spostarsi dal terreno su cui fu originariamente iniziata, stimo prezzo dell'opera innanzi di por termine a questo scritto, (motivato eventualmente dalla precitata pubblicazione della *Civiltà Cattolica*), di soggiungere in proposito poche altre riflessioni.

Non vi è alcuno tra i medici antichi e moderni che abbiano avuto in cognizione l'acqua di Anticoli, il quale, a mio credere, siasi ricusato accordarle un singolare potere curativo in ispecie nelle malattie che riconoscono il principio da una affezione calcolosa delle vie orinarie, ed il fatto dei moltissimi malati che fin da remoto tempo si valsero efficacemente di quell'acqua e che tuttora fiduciosi vi ricorrono per consiglio e suggerimento dei rispettivi curanti, conferma amplamente questo mio apprezzamento. Non tutti i Medici però furono unanimi nel precisare o a meglio dire nell'interpretare il modo con cui queste acque fisiologicamente agiscono nella vita intima del nostro organismo. Tra questi recentemente un eminente nostro

Prof. (1) fu di parere che l'azione antilitiaca di cui è dotata la nostra acqua non potesse già attribuirsi ad alcuna *virtù speciale ed intrinseca* della medesima, ma esclusa l'idea di qualsiasi sostanza mineralizzante e *dissolvente* sostenne invece doversi ritenere che la ridetta acqua agisca *in via meramente risolvente ed espulsiva.*

Benchè profano alla scienza medica, tenuto conto nulladimeno di parecchie osservazioni che in ripetute circostanze io stesso avea avuto occasione di fare sopra gli effetti di quelle acque, tale concetto a me non parve pienamente attendibile.

Si comprende di leggieri che una esatta analisi avrebbe potuto senz'altro sciogliere ogni dubbio in proposito; ma in difetto di questa, pensai che una serie di esperienze condotte colla debita precisione ed accuratezza sopra materiali di diversa natura immersi per più o meno tempo nella precitata acqua allo stato naturale, avrebbero potuto se non altro somministrare un po' di luce in argomento, che è quanto dire avrebbero potuto constatare se queste acque in sostanza erano realmente in grado o no di spiegare, sempre allo stato naturale, qualche virtù chimica o dissolvente sui detti materiali.

Ecco pertanto l'origine degli esperimenti che ebbi l'agio di eseguire sulle sorgenti coll'autorizzazione del Municipio di Anticoli e coll'intelligente cooperazione del Dott. Morfino, di cui resi conto nelle mie precedenti memorie (2) ai quali poi fecero seguito quelli fatti esclusivamente dallo stesso Dott. Morfino, che la *Civiltà Cattolica* riportò nel suo quaderno Num. 846 del 3° Sabbato di Settembre 1885.

Dietro le risultanze favorevoli di questi esperimenti, basandomi sopra alcuni criteri di analogia che diffusamente ebbi luogo altra volta di esporre, per mia parte (e con me anche il Dott. Morfino) ho acquistato una ferma convinzione che l'acqua di Fiuggi a simiglianza di quella di Vichy e di altre località, possiede realmente una virtù intrinseca capace di fondere le concrezioni che si formano nell'apparato delle vie orinarie. Quale sia peraltro questo principio mineralizzatore a cui si deve tale virtù, non potrà essere rivelato all'infuori che da un'esatta analisi chimica: analisi che finalmente ho la soddisfazione di annunciare (dopo averla tante volte suggerita e raccomandata!) essere ormai in corso di esecuzione, sotto l'immediata di-

(1) Delle acque di Anticoli e del loro vantaggio contro i calcoli orinari. Memoria del Dott. Francesco Scalzi, Professore di Materia medica di Terapia e d'Igiene nell'Università Romana, Membro del Coll. Medico Chirurgico, Primario degli Ospedali di Roma. Roma 1867.

(2) Memorie citate nelle note 1 e 3.

rezione dell'illustre Prof. Cannizzaro nell'Istituto Chimico dell'Università Romana.

In attesa peraltro della pubblicazione di questa analisi, la quale son sicuro gioverà sempre più a confermare il potere curativo dell'Acqua di Anticoli nelle affezioni calcolose e sue congeneri, per quanto si riferisce alla questione scientifica a cui ho accennato di sopra, non sarà senz'interesse l'apprendere un'altra recente esperienza fatta dal più volte citato Dott. Morfino, dal quale vennemi testè gentilmente comunicata.

Il suddetto Prof. a viemeglio ribadire il principio che l'acqua di Fiuggi, non è già semplicemente, come si era in contrario opinato, un'*acqua potabile tipo, molto prossima all'acqua distillata* a simiglianza della quale *tender deve a caricarsi di materiali estranei e servire in tal modo al discioglimento ed eliminazione dei principî solidi contenuti nelle vie orinarie*, (1) ma che invece deve senza meno possedere una facoltà distinta capace di sciogliere direttamente le concrezioni calcolose; avuti 22 calcoletti di acido urico del peso complessivo di centigrammi 80 emessi tutti da poche ore da un tal G. A, a seguito appunto della cura di quest'acqua per uso interno, ne distribuì la metà del peso di centigrammi 40 di una carafa di vetro contenente 200 grammi di acqua di Fiuggi presa di fresco dalla sorgente, ed il residuo in altra carafa ripiena di egual volume di acqua distillata; quali carafe a vista di parecchi testimoni che presenziarono l'operazione furono quindi chiuse e suggellate ermeticamente. Tutto ciò risulta da un apposito processo verbale, che mi fu reso ostensibile, munito della vidimazione legale dell'autorità competente.

Trascorso appena un mese dall'immersione, previo riscontro dell'integrità dei sigilli, i calcoletti infusi nell'acqua distillata si verificarono appena sbiaditi di colore e quasi insensibilmente diminuiti di volume, mentre il liquido si era mantenuto presso che perfettamente chiaro; laddove per converso quelli immersi nell'acqua di Fiuggi si trovarono per la massima parte completamente disciolti, ad eccezione di tre che quantunque assai diminuiti presentavano ancora un certo spessore (2); il fondo poi di questa seconda carafa si notò coperto da un abbandante sedimento terroso, il quale ancorchè lievemente agitato, comunicava all'acqua un forte intorbidamento di un colore carico opalescente o lattiginoso.

(1) Scalzi memoria citata.

(2) Probabilmente l'acqua era già saturae da ciò il residuo dei tre piccoli calcoletti parzialmente insoluti.

Questa esperienza ebbe luogo nel Giugno 1885 ed io ho avuto l'agio (1) di osservare personalmente le due carafine nel Gennaio p. p. il cui contenuto si trovava tuttora nelle identiche condizioni che ho sopra descritte. Aperta in seguito quella che racchiudeva i calcoli disciolti ne fu decantata interamente l'acqua e sottoposto al microscopio il residuo, si ebbe luogo a rilevare che questo era costituito essenzialmente da granuli di renella non molto corrosi, ma però completamente disgregati fra loro: e poichè come è noto i calcoli sono formati essenzialmente (2) dall'aggregazione dei suddetti granuli cementati insieme a mezzo di un muco (sia esso *litogeno specifico*, sia renale, vescicale o degli ureteri) capace anch'esso di acquistare col tempo una durezza lapidea, sembra che dall'osservazione suddetta resti constatato che l'acqua di Fiuggi possiede realmente un'azione dissolvente sui calcoli, in quanto che ha una virtù specifica d'intenerire e sciogliere completamente il muco che serve di cemento alle particelle solide di cui si compongono i calcoli stessi.

Ora questo modo specifico di agire dell'acqua di Fiuggi è appunto quello che io stesso avea indicato e sostenuto fin da parecchi anni indietro (3) e che molto prima di me, benchè a mia insaputa, avea dato per probabile anche il celebre Dott. Taberlet in proposito di *Evian les Bains* nella sua scientifica illustrazione di quell'acqua minerale (4).

Comunque peraltro ciò avvenga, lo che è a sperarsi potrà esser meglio chiarito, dopo che sarà completata la ridetta analisi che a quanto pare sarà quanto prima resa di pubblica ragione, a me basta di aver riferito il risultato della suindicata esperienza fatta in parità di condizioni coll'acqua distillata e con quella di Fiuggi, per dimostrare anco una volta contro la tesi contraria, che quest'acqua agisce realmente in virtù di una facoltà propria ed intrinseca capace non solo di risolvere ma ben anche di dissolvere le concrezioni calcolose. (5)

---

(1) E con me il professore Francesco Marino Zuco, Assistente nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) G. Primavera — Manuale di Chimica-Clinica — Napoli, 1873.
Enrico Meckel — Mikrogeologie — Berlin, 1856.
Brigelow — Recherches sur le calculs de la vessie — Paris. N° 212. Thése.

(3) Veggasi « L'Acqua di Fiuggi in Anticoli di Campagna ». Studi del Cav. Giovanni Morfino Dottore in Medicina e Chirurgia. Foligno 1884.

(4) Evian ses eaux minérales et leur valeur thérapeutique par le D.r Taberlet ancien deputé. 2.me Edition. Nice 1883.

(5) Questa memoria venne presentata nella sessione III.a del 21 Febbraio 1886, Anno XXXIX: ma essendo in ritardo la pubblicazione degli Atti, è stata inserita nel presente fascicolo a fine di sollecitarne la pubblicazione.

CONTRIBUZIONE ALLO STUDIO DELLA GEOLOGIA DELLE MONTAGNE MODENESI E REGGIANE

NOTE

DI D. G. MAZZETTI

Intorno alla relazione del terreno di Costa de' Grassi con le Arenarie di S. Martino e Ranocchio.

Costa de'Grassi è un piccolo villaggio dell'alta montagna reggiana, dipendente dal Comune di Castelnovo nei Monti: è situato a sud-ovest di quest'ultimo luogo, ed a pochi chilometri da esso. A sud tocca il fiume Secchia, e la vasta formazione gessosa di Vologno-Busana; mentre ad Est ha la famosa Pietra di Bismantova, che gli si erge a lato quasi smisurato gigante. Anche il territorio di Costa de'Grassi, non altrimenti che tutti i territori apenninici, andò certamente soggetto alle più forti convulsioni telluriche; giacchè tutte quelle fra le poche sue roccie, che si trovano ancora in posto, hanno i loro strati non solo fortemente inclinati, ma in alcuni posti portati quasi alla verticale.

Fra le roccie poi, che concorrono a formare il territorio di Costa de'Grassi, le Argille scagliose sono le più abbondanti: le altre consistono invece in gessi, in serpentini, ed in Arenarie più o meno scipiti, di natura piuttosto argillosa o molto micacee, intersmolificate con Marne esse pure argilloso-micacee, o con calcari per lo più a fucoidi. Le argille scagliose occupano quasi da loro sole la maggior parte del paese: i Gessi, ed i serpentini affiorano nel suo lembo meridionale; e le arenarie coi loro calcari e marne, costituiscono poscia quel tratto di suolo, in cui sta il villaggio di Costa, con poche altre località ivi intorno.

Il territorio di Costa de'Grassi, si può quasi considerare come privo di Fossili; stantechè di tutte le roccie che lo formano, non vi sono che le arenarie ed i calcari che ne contengono. Però i calcari in alcuni posti sono gremiti di Fucoidi, ma le arenarie, meno qualche raro Ammonita (1) ed alcuni Inocerami (2) non hanno mai dato altri fossili in nessun luogo del detto territorio.

---

(1) Fin'ora non è a mia cognizione, che a Costa de'Grassi sia stato rinvenuto altro Ammonita, meno quello descritto dal Mantovani.

(2) Delle impronte di Inocerami a Costa de'Grassi ne sono state raccolte più di una; ed una

Ma quello che intorno alla roccia del territorio di Costa de'Grassi merita veramente di essere rilevato, si è: che coteste roccie ricoprono perfettamente alcuni tratti di terreno che affiora pur'anche a Montese, nelle sue frazioni di S. Martino e Ranocchio. In tutte e tre queste località, non solo vi si riscontrano sempre le stesse Arenarie argilloso–micacee, intercalate a strati di Calcari e Marne dell'istessa natura litologica e contenenti gli stessi fossili; ma tanto nel Rio Fontanelle presso Costa, quanto nella montata della Riola in S. Martino, non che alle Coste di Ranocchio, le roccie or' ora accennate si trovano ancor tutte stratificate in uno e medesimo ordine. (1)

E questa conformità delle roccie di Costa de' Grassi, colle arenarie di S. Martino e Ranocchio, sia poi un fatto che meriti realmente di venir segnalato, è cosa sì chiara e tanto evidente, che non ha certo bisogno di essere provata. Un tal fatto, non solo serve a dimostrare nel modo più spiccio e sicuro, che le dette roccie si sedimentarono tutte nello stesso tempo, in un medesimo mare, e sotto le stesse condizioni battimetrico–naturali, ma in pari tempo, mentre raggruppa insieme lontani paesi, e tende così ad unificare sempre più le sparse membra dei loro terreni geologici, contribuisce pur'anche grandemente al progresso degli studi geologici stessi di quelle località.

Ma se non mancano punto argomenti, per comprovare tanto l'identità di origine, che la parità di tempo di tutte coteste roccie, non è però così allorchè si tratta invece di determinare a che sistema geologico si devono ancora attribuire. È vero che coteste stesse roccie contengono fossili, che sono anche assai caratteristici: se non che questi fossili appartengono poi essi realmente alle roccie, presso le quali si sono raccolti? Volendo stare

---

di queste fa anche parte della mia collezione, che mi fu regalata dall'esimio mio amico Signor Domenico Tomei di detto paese. Come questa, così anche le altre impronte, e lo stesso Ammonita ov'era indicato, furono trovate dal medesimo Tomei nelle vicinanze del villaggio. Alcune di dette impronte dovrebbero trovarsi anche nel museo paleontologico della R. Università di Modena; giacchè da quanto mi assicurò il prenominato signore, gliele avrebbe mandate egli stesso in quell'anno, in cui fu ivi assistente alla Cattedra di Geologia sotto il Prof. Uzielli.

(1) Veramente la corrispondenza fra queste roccie, non che tra i fossili che contengono, non potrebbe certo essere più completa. Anche nell'alveo del Rio di S. Martino furono già raccolte più impronte d'Inocerami; ed una di queste da me stesso, che fu giudicata dal De-Stefani per un impronta dell'*Inoceramus Cripsii*: della quale specie ne ha pure tutti i caratteri anche l'altra impronta che posseggo di Costa de' Grassi. È vero che sino al presente nè a S. Martino, nè a Ranocchio si sono ancora trovate traccie sicure di Ammoniti; però il Signor Amilcare Lorenzini, con impronte di Inocerami, raccolse quivi ancora un'altra impronta singolarissima, che con molta probabilità appartiene ad un *Hamites*: per cui neppure nei preaccennati luoghi mancherebber i rappresentanti la famiglia dei detti Cephalopodi.

a tutte le probabilità, parrebbe proprio che non potesse essere altrimenti: ma d'altronde: chi ci sa dire in quanti modi una reliquia organica da un terreno di un'epoca può venire trasportata in quello di un'altra?

Tuttavia un motivo fortissimo, per ritenere che i prodotti fossili spettino realmente alle roccie presso le quali si trovano essi, mi pare sia questo anzi che no: vale a dire, che non solo presso le stesse roccie delle indicate località si trovano le medesime qualità di fossili; ma ben'anche, perchè in nessun altro posto delle indicate località si trova tal fatta di fossili, che attorno alle roccie or'ora accennate. Che identici fenomeni si possano ancor produrre in paesi diversi, e tra loro assai discosti, non è sicuramente impossibile: ma sarebbe però stranissimo, che questi stessi fenomeni si producessero pur'anche con tutte le particolarità, per fino le più minute.

Ammesso dunque come più probabile, che tali fossili sieno propri delle sopra indicate roccie, allora anche il posto che queste dovrebbero occupare nella scala dei terreni geologici, sarebbe nettamente indicato: poichè cotai fossili medesimi, essendo fossili appartenenti al sistema cretaceo, cretacee dovrebbero pur essere ancora le roccie dalle quali derivano.

Se non che: questi fossili sono poi essi assolutamente cretacei? e non potrebbe forse qualche loro specie essersi trafugata anche nell'eocene? Certo è, che non sarebbe questa la prima volta, che certi fossili attribuiti prima ad un sistema, o periodo geologico, si sono poscia in seguito raccolti ancora in altri: perchè dunque non potrebbe ciò essere avvenuto anche per quelli, di cui ora si parla?

Per verità; se si trattasse di fossili poco noti, e raccolti in roccie la cui età fosse ben determinata, si potrebbe giustamente ritenere che il tempo della vera loro apparizione, e la durata della vita loro, per mancanza di sufficienti cognizioni, fosse stata mal definita: e che quindi appartenessero essi a ben tutt'altro gruppo, o sistema di terreni, che non quello a loro stessi assegnato. Ma qui le cose procedono invece in senso inverso: chè i fossili raccolti tanto nelle roccie di Costa de' Grassi, quanto in quelle di S. Martino e Ranocchio, sono già conosciutissimi da tempo: nè sin'ora m'è noto che fossili di tal fatta se ne siano mai trovati, che in roccie cretacee: mentre all'opposto le roccie che li contengono, per l'incertezza appunto della relativa loro posizione stratigrafica, dai geologi locali sono state più volte trasportate, ora da un sistema, ed ora da un periodo all'altro geologico.

In fatti: Doderlein, che studiò con tanta cura queste località, nella sua Carta geologica delle provincie di Modena e Reggio, conguaglia coteste

roccie al macigno giovane, e le colloca nell'Eocene medio. (Note illustrative della Carta geologica del Modenese e del Reggiano; Modena, 1870). Mantovani nella descrizione dell'Ammonita di Costa de' Grassi, e delle roccie relative, accettò più volentieri l'idea dell'eocenità del detto Ammonita, piuttosto che far cretacee le rocce che lo includevano. (Delle Argille scagliose, e di alcuni Ammoniti dell'Appennino dell'Emilia: Atti della Soc. Ital. di Scienze Nat. V. 8; Milano, 1875). Capellini nella sua dotta Memoria intorno al Macigno della Porretta, parlando in genere dei terreni di quella parte di Appennino bolognese, che confina coll'Appennino modenese, e che presso a poco contiene le stesse roccie, asserisce a dirittura: che ciò che si ha quivi di ben accertato in fatto di roccie in posto, non si può riferire a terreno più antico dell'Eocene superiore (1). (Il Macigno della Porretta, e le roccie a Globigerino dell'Appennino bolognese: Mem. estr. dalla Ser. 4. Tom. 2. delle Mem. dell'Accad. delle Scienze dell'Istit. di Bologna, 1881). Manzoni poi trattando della miocenità del Macigno, colloca invece fra i membri cretacei del Flysch appenninico le Arenarie psammitiche, la Pietra forte, i Calcari alberesi, e le Argille scagliose, con Inocerami, Ammoniti, Paleodyction, e l'emertiliti: (Boll. del R. Com. Geologico, 1881; n. 1 e 2): rocce queste, che sono appunto le analoghe alle rocce di Costa de' Grassi, e di S. Martino e Ranocchio or'ora accennate.

Da tutto questo si vede dunque chiaramente, che fra i Geologi che hanno studiato coteste località niuno ha mai dubitato, che gl'Inocerami ed Ammoniti, trovati sopra le roccie prenominate, non fossero cretacei: ma che l'unica discrepanza, che quivi stesso si riscontra fra essi, consiste appunto nella determinazione del posto, che le roccie in discorso dovrebbero realmente occupare nella serie cronologica dei terreni, costituenti l'Appennino emiliano.

Che se poi i medesimi Geologi, anche ad onta della qualità tutta particolare dei fossili, continuarono ancora a lasciare nel Gruppo terziario cotali roccie, non se ne può certo far nessun caso: stante che da un lato non si è mai voluto credere, che nell'Appennino dell'Emilia potessero esistere in posto roccie veramente cretacee; e dall'altro essendosi sempre raccolti cotesti fossili in terreni argillo-scagliosi orribilmente sconvolti, e tenuti ancora per eruttivi, piuttosto che fossili appartenenti alle dette roccie, dai

(1) Aveva appena terminato questo piccolo lavoro, allorchè mi capitò in mano una recentissima Memoria del Prof. Capellini intorno *Al Cretaceo superiore ed il gruppo di Praibona nell'Appennino*, etc. nella quale memoria il chiarissimo Professore ammette ora anch'esso, che in detto Appennino vi hanno sì roccie, il cui *complesso litologico è analogo al vero Flysch eocenico superiore alpino, ma che pei fossili devesi ritenere come rappresentante il cretaceo superiore.*

sopraccitati Geologi si consideravano invece come fossili trasportati in esso da roccie assai più profonde, e di maggiore antichità.

Intorno alla corrispondenza fra le roccie costituenti le due Catene montuose di Montello, Montese, Monteforte; e di Semese, Sassoguidano, Gaiato.

Al nord-est di quella catena di monti, su la quale stanno Montello, Montese e Monteforte, n'esiste un'altra non meno montuosa, e quasi parallela ad essa, su cui stanno pure Semese, Sassoguidano, e Gaiato.

E bene: le roccie componenti queste due catene di monti corrispondono perfettamente fra loro, tanto sotto l'aspetto litologico, che petrografico: giacchè mentre i loro crinali sono costituiti da Calcari identici, intersecati alle stesse molasse serpentinose, e marne di natura terrosa; da marne più o meno grossolane, tutte della medesima natura mineralogica, e qua e là intersecate da qualche esile strato di Calcare sabbionoso, sono parimenti composte ambe le loro basi.

Ma non è tutto: la medesima corrispondenza, che si riscontra fra le roccie componenti le due catene montuose or'ora accennate, si trova pur'anche fra i fossili, che esse reciprocamente contengono: poichè nella stessa guisa che le roccie costituenti i loro crinali hanno Echinodermi e spugne della medesima specie, appartenenti al Miocene inferiore; così quelle che ne formano le basi abbondano invece di Gasteropodi e Conchiferi, essi pure tutti della stessa qualità, e spettanti al miocene medio.

Ora: dietro questi fatti, mi sembra che si possa certo inferire, che le roccie superiormente indicate, oltre di appartenere tutte quante allo stesso periodo miocenico, dovettero pur'anche essere una volta tutte quante unite insieme, e fra loro strettamente collegate: unione che venne poscia interrotta da una qualche catastrofe tellurica, che le sollevò, le infranse, e le ridusse allo stato presente.

Ma e cotesta catastrofe in che epoca mai sarà ella avvenuta?

Come abbiamo già anche precedentemente accennato, le roccie che costituiscono le due catene montuose di Montese e Sassoguidano, appartengono sì al medesimo periodo geologico; ma non però tutte allo stesso piano: perchè quelle che formano il loro crinale, per la natura dei fossili che contengono, spettano al miocene inferiore (1), mentre le altre appartengono invece al miocene medio.

(1) Qui però non voglio intralasciare di avvertire, che la maggior parte delle specie di echi-

Or bene gli strati di tutte coteste roccie si succedono ovunque regolarmente l'un l'altro e senza nessuna vera discordanza fra essi; da che anche là, ove sembrerebbe scorgervi qualche disarmonia tra i medesimi, da quanto si vede, questa è sempre più apparente che reale; e dipende piuttosto da forme topografiche dei posti, che non da vera irregolarità di successione.

Pare dunque non potersi dubitare, che la catastrofe che spaccò, e divise d'infra loro coteste due serie di monti, non sia proprio accaduta, se non se in sul finire del sistema miocenico; e forse precisamente, allorchè sorsero i numerosi serpentini di queste località. Certo è, che se una tale catastrofe fosse succeduta prima di questo termine, la relativa posizione stratigrafica delle dette roccie, non sarebbe sicuramente così ordinata, come anche attualmente si trova.

E che poscia l'eruzione dei serpentini di cotesti luoghi, abbia anch'essa contribuito non poco al sollevamento delle roccie in discorso, e a dar loro la forma orografica, che conservano forse anche in oggi, si arguisce anzi tutto da ciò: che molti di questi serpentini, per contenere acclusi non pochi frammenti di Calcare marnoso eocenico, mostrano già chiaramente di essere sortiti dal seno della terra dopo la formazione di una tal roccia; poi si comprova ancora dal fatto: che questi serpentini medesimi si trovano appunto tutti allineati lungo la valle, che s'intromette fra le due serie dei monti predetti.

Ma qui si potrebbe forse muovere la quistione, intorno alla natura eruttiva o meno delle roccie serpentinose. Se non che ad onta di tutto ciò che si è detto anche contro all'idea eruttiva dei serpentini, per me tanto non ho ancora trovato nessun'argomento che m'induca a modificare l'opinione, che su questo particolare ho già altre volte manifestata; cioè che i serpentini, e particolarmente poi quelli di cui ora si parla, sieno in realtà di natura eruttiva: (*Montese, ed i suoi terreni geologici, ecc.* estratto dall'Annuar. della soc. dei Nat. di Modena; An. 15. – Tip. Vincenzi, 1881): e ancorchè non vi fossero altre ragioni per confermarmi in essa, mi basterebbe sempre questa sola; vale a dire l'insieme delle forme, sotto le

---

nodermi, raccolti tanto su la catena montuosa di Montese, che su quella di Sassoguidano, appartiene all'eocene, e sono analoghi a quelli che si trovano nel Vicentino in consimile terreno. Di più, in coteste località manca ancora sin qui qualunque traccia di Clypeastroidi. Si potrebbe dunque ripetere benissimo anche per queste roccie la bella frase or'ora citata del Capellini; vale a dire « che pel complesso loro litologico esse appartengono al miocene inferiore; ma pei fossili dovrebbero invece spettare al terreno eocenico ».

quali si presenta anche solo all'occhio il grosso ammasso serpentinoso di Montespecchio.

Del resto però per far ritenere, che i serpentini almeno di Montese sieno veramente di natura eruttiva, oltre all'argomento che ne porge il serpentino di Montespecchio, vi sono ancora altre ragioni non poche: e tali sono certamente « lo stato quasi completamente bolloso e scoriacieo di alcuni di essi », non che « la metamorfosazione che in molte località hanno subìto le roccie al loro contatto (1): metamorfosazione, che lo stesso Dodorlein avea già constatata anche prima di me; anzi fu forse questa medesima metamorfosazione la causa principale, che indusse il detto Geologo a classificare i serpentini della media montagna modenese e reggiana fra le roccie mioceniche. (2)

Modena, 29 Gennaio 1885.

Ab. Giuseppe Mazzetti.

(1) Il Prof. Taramelli nella sua Memoria *Contribuzione alla geologia dell'Appennino di Piacenza*, che gentilmente mi favorì, indica come argomenti contrari all'eruttività dei serpentini la « *mancanza di metamorfosismo* » nelle roccie a contatto coi serpentini stessi, non che l'assoluta « *mancanza di struttura bollosa e scoriacea* » in essi. Mi dispiace grandemente, che il chiarissimo Prof. Taramelli non abbia ancora visitati di persona i serpentini di Montespecchio, e del Faldello: da che sono persuasissimo, che così si sarebbe convinto, che tali mancanze almeno nei serpentini di Montese, non si riscontrano: fatto che io stesso avea di già notato fino dall'anno 1881; nella mia Memoria *Montese, ed i suoi terreni geologici*, etc.

(2) Il Prof. Doderlein, seguendo l'opinione particolarmente del Savi attribuì alla media montagna modenese e reggiana i serpentini di 3ª eruzione, che sono appunto quelli di Verona, Pompeano, di Montespecchio etc.; che perciò fanno parte della regione miocenica di questa parte del basso Appennino dell' Emilia.

LETTERA DEL SOCIO CORRISPONDENTE
P. GIOVANNI EGIDI, S. J.
AL R. P. FERRARI
INTORNO AD UN PROBLEMA DI GNOMONICA

Pregmo e Rev. P. Stanislao,

Trovandomi qui in Segni e volendo accertarmi se il mio e gli altri orologi segnassero giusto e non avendo alla mano che l'orologio solare indipendente dalla meridiana, che Ella presentò alcuni anni fa all'Accademia, mi servii di quello, ma mi venne il dubbio, se con quello solo e senza conoscere che approssimativamente la declinazione del Sole, avrei potuto ottenere un risultato soddisfacente. Quindi mi venne in pensiero di sciogliere il problema seguente:

« Conoscendo la latitudine del luogo, e l'altezza del Sole, trovare l'ora » e la declinazione solare media del giorno, per mezzo di due o più os» servazioni ».

Siano h, h', h'' gli angoli orarii rispondenti alle distanze zenitali z, z', z'' osservate in diverse ore, λ' il complemento della latitudine del luogo, e δ' il complemento della declinazione media del giorno: dovranno verificarsi le equazioni

$$\cos h \ \operatorname{sen}\delta' \ \operatorname{sen}\lambda' = \cos z \ - \cos\lambda' \ \cos\delta' \qquad (1)$$

$$\cos h' \ \operatorname{sen}\delta' \ \operatorname{sen}\lambda' = \cos z' \ - \cos\lambda' \ \cos\delta' \qquad (2)$$

$$\cos h'' \ \operatorname{sen}\delta' \ \operatorname{sen}\lambda' = \cos z'' - \cos\lambda' \ \cos\delta' \qquad (3)$$

Benchè ciascuna di queste equazioni abbia due sole incognite cioè angolo orario e complemento della declinazione, tuttavia perchè vi si trovano moltiplicate insieme le funzioni di tali archi, e perchè vi sono il seno e il coseno di δ', e perchè gli angoli orarii in ciascuna sono diversi perciò due sole di esse darebbero una equazione di grado superiore al primo da risolvere in fine, anzi almeno di quarto grado. Da tutte e tre però si può ricavare una risoluzione di primo grado, se coll'orologio si siano no-

tate le differenze di ore $h - h'$, $h' - h''$. Difatti dividendo l'(1) per la (2), e la (2) per la (3) otteniamo

$$\frac{\cos h}{\cos h'} = \frac{\cos z - \cos\lambda' \cos\delta'}{\cos z' - \cos\lambda' \cos\delta'} \qquad (4)$$

$$\frac{\cos h'}{\cos h''} = \frac{\cos z' - \cos\lambda' \cos\delta'}{\cos z'' - \cos\lambda' \cos\delta'} \qquad (5)$$

le quali ci dànno

$$\cos\lambda' \cos\delta' (\cos h' - \cos h) = \cos h' \cos z - \cos h \cos z'$$

$$\cos\lambda' \cos\delta' (\cos h'' - \cos h') = \cos h'' \cos z' - \cos h' \cos z''$$

ossia

$$\cos\lambda' \cos\delta' = \frac{\cos h' \cos z - \cos h \cos z'}{\cos h' - \cos h} \qquad (6)$$

$$\cos\lambda' \cos\delta' = \frac{\cos h'' \cos z' - \cos h' \cos z''}{\cos h'' - \cos h'} \qquad (7)$$

sostituito il valore (6) nel secondo membro della (1) e il valore (7) nel secondo membro della (2) avremo

$$\cos h \operatorname{sen}\delta' \operatorname{sen}\lambda' = \cos z - \frac{\cos h' \cos z - \cos h \cos z'}{\cos h' - \cos h}$$

$$\cos h' \operatorname{sen}\delta' \operatorname{sen}\lambda' = \cos z' - \frac{\cos h'' \cos z' - \cos h' \cos z''}{\cos h'' - \cos h'}$$

che ridotte ci somministrano

$$\operatorname{sen}\delta' \operatorname{sen}\lambda' = \frac{\cos z' - \cos z}{\cos h' - \cos h} = \frac{\operatorname{sen}\frac{z+z'}{2} \operatorname{sen}\frac{z-z'}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h+h'}{2} \operatorname{sen}\frac{h-h'}{2}} \qquad (8)$$

$$\operatorname{sen}\delta' \operatorname{sen}\lambda' = \frac{\cos z'' - \cos z'}{\cos h'' - \cos h'} = \frac{\operatorname{sen}\frac{z'+z''}{2} \operatorname{sen}\frac{z'-z''}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h'+h''}{2} \operatorname{sen}\frac{h'-h''}{2}} \qquad (9)$$

Da queste abbiamo ponendo

$$M = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{z' + z''}{2} \quad \operatorname{sen}\dfrac{z' - z''}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{h' - h''}{2}}$$

$$N = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{z + z'}{2} \quad \operatorname{sen}\dfrac{z - z'}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{h - h'}{2}}$$

$$M \operatorname{sen}\frac{h + h'}{2} = N \operatorname{sen}\frac{h' + h''}{2} \qquad (10)$$

Siano ora α, α', α'' gli angoli orarii osservati nell'orologio rispondenti ciascuno al momento delle rispèttive osservazioni; sia ε l'errore dell'orologio (in arco) e supponiamo nullo o corretto l'andamento dello stesso orologio; avremo

$$h = \alpha + \varepsilon, \quad h' = \alpha' + \varepsilon, \quad h'' = \alpha'' + \varepsilon$$

e quindi

$$\frac{h + h'}{2} = \frac{\alpha + \alpha'}{2} + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon, \quad \frac{h' + h''}{2} = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} + \varepsilon = \alpha_2 + \varepsilon$$

con tale sostituzione la (10) dà

$$M(\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\varepsilon + \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\varepsilon) = N(\operatorname{sen}\alpha_2 \cos\varepsilon + \cos\alpha_2 \operatorname{sen}\varepsilon)$$

Donde si ha finalmente

$$\operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{M\operatorname{sen}\alpha_1 - N\operatorname{sen}\alpha_2}{M\cos\alpha_1 - N\cos\alpha_2} \qquad (A)$$

che risolve il problema.

NB. Gli angoli orarii h, h', h'' dovranno prendersi col segno conveniente cioè negativi quelli osservati nelle ore antimeridiane, positivi quelli osservati nelle ore pomeridiane, l'errore ε è sempre dello stesso segno in se stesso, ma riesce di segno contrario rispetto alla distanza del sole dal meridiano nelle ore antimeridiane e pomeridiane.

La formola (A) suppone tre osservazioni e non è affatto comoda a calcolarsi, a me poi riusciva impossibile per non aver portato meco le tavole dei logaritmi. Cercai dunque se il mio orologio solare in carta mi desse

un metodo più facile e spedito, e mi pare di averlo trovato a questo modo.

Fo due osservazioni una nelle ore antimeridiane un'altra nelle pomeridiane: sia δ la declinazione vera del sole, e siano

Osservazioni antimerid.	Osservazioni pomerid.
h_0 l'ora vera	h_0^1 l'ora vera
h_1 l'ora data dall'orologio solare	h_1^1 l'ora data dall'orologio solare
h_2 l'ora segnata dall'oriuolo	h_2^1 l'ora segnata dall'oriuolo.

ε l'errore nell'ora dell'orologio solare, dovuto all'errore di declinazione.
k l'errore dell'oriuolo: supposto nullo o corretto l'andamento.

Se le due osservazioni sono fatte a un dipresso a distanze zenitali uguali del Sole, l'errore ε sarà il medesimo in h_1 e h_1^1, ma sarà di segno contrario nelle due osservazioni. Avremo adunque.

$$h_1 = h_0 + \varepsilon \qquad h_1^1 = h_0^1 - \varepsilon$$

$$h_2 = h_0 + k \qquad h_2^1 = h_0^1 + k$$

donde

$$h_2 - h_1 = k - \varepsilon$$

$$h_2^1 - h_1^1 = k + \varepsilon$$

e conseguentemente

$$k = \frac{(h_2 - h_1) + (h_2^1 - h_1^1)}{2} \qquad \text{(B)}$$

$$\varepsilon = \frac{(h_2^1 - h_1^1) - (h_2 - h_1)}{2} \qquad \text{(C)}$$

Ciò vuol dire che l'errore dell'oriuolo è la media degli errori trovati colle due osservazioni: quanto alla declinazione δ si può trovare direttamente sullo stesso orologio solare: poichè conosciuto k è conosciuto h_0 e h_0^1, e quindi ε, si vede sull'orologio in quale parallelo doveva trovarsi il sole per dare colle distanze zenitali osservate h_0 ovvero h_0^1.

Ecco l'applicazione di questo metodo fatta il 20 novembre pross. pass., ed Ella potrà verificare sopra un annuario astronomico se abbia trovata così con sufficiente approssimazione la declinazione del sole per quel giorno.

20 Novembre 1884

Latitudine del luogo $41^0\ 40'$

Declinazione approssim. presunta $-21^0\ 15'$

$z_1 = 87^0\ 10'$, $h_2 = 7^h\ 23^m$ ant.; $z_2 = 81^0\ 45'$, $h_2^1 = 3^h\ 47^m$

$h_1 = 7\ \ 30$ $\qquad$ $h_1^1 = 3\ \ 48$

$(h_2 - h_1) = -7^m$ $\qquad$ $(h_2^1 - h_1^1) = -1^m$

$(h_2^1 - h_1^1) = -1$

$-8 : 2$

$k = -4$

correz. temp. med. $= -14$

diff. $+10^m$ l'orologio avanza sul tempo medio

$$\left.\begin{array}{l} h_0 = 7^h\ 27^m \\ h_0^1 = 3\ \ 51 \end{array}\right\} \varepsilon = +\ 3^m$$

$\delta = -20^0$ declinazione corretta

Questa che le ho esposto è una nuova applicazione, se non m'inganno assai utile in pratica, dell'orologio solare indipendente dalla meridiana, che Ella m'indusse a publicare, e perciò gliela ho mandata perchè credo che le darà piacere anche questo piccolo frutto della mia invenzione. Non le dico di presentare questa noticina all'Accademia, seppure a Lei non paresse cosa ben fatta, perchè mi pare che non meriti: ma in ciò mi rimetto al suo giudizio. Gradisca, ecc.

Segni, 1° Decembre 1884.

P. G. Egidi, S. J.

SUL MODO PIU' UTILE DI CONVERTIRE IN FORZA LOCOMOTRICE L'ENERGIA DI FORZE IDRAULICHE.

NOTA

DELL'ING. CAV. FILIPPO GUIDI

Al perfezionamento ammirabile degli apparecchi meccanici pel convertimento delle varie forze fisiche e per la loro trasmissione, associato alla teoria la più rigorosa io credo che sia debitrice l'era presente pei tanti ritrovati veramente utili e soddisfacenti: ed a questo perfezionamento ed a tali studi noi specialmente in Italia oltremodo ricchi di forze idrauliche dobbiamo tener rivolta la nostra attenzione per cavarne profitto il meglio che si possa.

Intendo parlare specialmente dei grandi vantaggi che ora si possono avere mercè i nuovi modi di trasmissione della energia meccanica sia direttamente sia per mezzo della energia elettrica, e più particolarmente di tale energia usufruita per la locomozione.

È difatti grande il vantaggio risultante dal ravvicinamento delle varie industrie che ci forniscono i mezzi per sopperire alle necessità ed alle comodità della vita, come del pari è di somma utilità lo stabilire nei centri popolosi, le diverse officine col trasporto della energia meccanica prodotta da una caduta d'acqua, energia che giaceva inutile in balzi e dirupi inaccessibili; ma la possibilità di animare, direi quasi gratuitamente la locomozione nelle vie ferrate che piani piano diverranno il mezzo ordinario di comunicazione fra grandi e piccole città, è di tale interesse che deve formare lo scopo precipuo dei nostri studi, specialmente per supplire al difetto che abbiamo in Italia dei carboni fossili.

I mezzi sperimentati sino ad ora per trarre profitto delle forze idrauliche nella locomozione sono – le trasmissioni funicolari – le trasmissioni elettriche – le locomotive ad aria compressa.

Le trasmissioni funicolari possono essere, non dirò utili, ma possibili per distanze non superiori a sei o sette chilometri, ma sempre è necessario servirsene per velocità mitissime: furono impiegate le funicolari con vantaggio per trasporto di minerali o materiali da costruzione, ed in qualche caso speciale anche per passeggeri, nei piani fortemente inclinati.

Le trasmissioni elettriche dettero sufficienti risultati sotto l'aspetto della

velocità ma il limite a cui si giunse finora o per la potenza dell'apparecchio rimurchiatore e per la distanza del tratto percorso è ristretto in cinque chilometri appena in piccole ferrovie da considerarsi come tramvie e nulla più. Si studia da molti indefessamente per vincere le difficoltà prattiche della trasmissione elettrica e si ritiene generalmente che si possa giungere mercé i recenti perfezionamenti ad esercitare tratti di vera ferrovia lunghi anche quindici chilometri.

Le locomotive ad aria compressa sono certamente più atte al trasporto dei passeggeri poichè per esse non è punto limitata la velocità e si può ritenere utile questo sistema di locomozione anche per tratti lunghi dai quindici ai diciotto chilometri. Stupendi sono i congegni coi quali si giunse ad attenuare di molto i suoi difetti: intendo parlare dei belli perfezionamenti apportati agli organi della distribuzione a mezzo de' quali passa l'aria dalle pressioni enormi del serbatojo ambulante a quel giusto grado di tensione, vantaggioso tanto per la pressione finale sui pistoni, quanto per lo scappamento con perdita limitata di elatere. Sono pure ingegnosissimi i varii mezzi trovati per combattere il grave inconveniente dell' agghiacciamento nei cilindri del vapor d'acqua sempre commisto all' aria compressa. Pur tuttavia con tanti miglioramenti non si è mai giunti ad ottenere che la locomotiva ad aria compressa valga a surrogarne una a vapore quale occorrerebbe almeno per l'esercizio di una ferrovia secondaria , della lunghezza di venticinque chilometri.

Eccomi dunque ad esporre il mezzo col quale sembrami potersi raggiungere lo scopo di cui parlo. Una forza idraulica, anche imponente, convertita in energia elettrica può senza dubbio esser trasmessa non di dirò a 50 a 60 chilometri per non ricorrere a troppo forti capitali necessari pei conduttori elettrici ma con sufficiente economia a 25 chilometri almeno. Si potranno adunque con tale bel raggio di distanza da questa forza idraulica stabilire tanti apparati elettrolitici dai quali ottengansi tanti bei volumi d'idrogeno e di ossigeno. Quest'ultimo sarà pur impiegato vantaggiosamente sia come comburente, sia come agente chimico in varie industrie, sia finalmente per uso dell'arte salutare; ma vediamo (ciò che più monta) l'impiego dell' idrogene. Sia dunque l'idrogene elettrolitrico compresso a 15 atmosfere nel serbatojo di una locomotiva in luogo dell'aria, e dico soltanto 15 atmosfere per non ricorrere a pressioni ben più elevate che sono pur adottate per le macchine ad aria compressa: si modifichi l'apparecchio motore perchè agisca nè più nè meno che come una delle macchine a gas divenute ormai comunissime; ebbene avremo,

senza esagerare di molto le dimensioni del serbatojo di siffatta locomotiva, 360 metri cubi di gaz idrogene disponibili, che secondo l'esperienze fatte coi motori Otto e Langen produrranno la forza di 100 cavalli effettivi in azione costante per la durata di due ore e mezza: il che significa che avremo una locomotiva atta a rimurchiare un treno del peso complessivo di 100 tonnellate all'incirca con la velocità di 36 chilometri l'ora per un viaggio di andata e per quello di ritorno in un tronco di ferrovia lungo 45 chilometri, senza tener conto della forza viva che si potrà utilizzare dall'elatere dell'idrogene compresso.

Siamo dunque a risultati che non hanno neppur confronto con quelli ottenuti sino ad ora o che si possa sperare che si ottengano dai tre sistemi di locomozione che sopra ho descritti.

Con una forza idraulica di 350 cavalli effettivi all'incirca si potrà ottenere l'azione della locomotiva or ora determinata per tre viaggi di andata e ritorno nelle 24 ore. Nelle macchine a gas fu già sperimentato l'idrogene puro o quasi puro in luogo del gas d'illuminazione ordinariamente adoperato: fu mestieri modificare soltanto gli organi della distribuzione; ma insomma niuna difficoltà s'incontrerebbe nell'uso dell'idrogene elettrolitico. Motori a gas della forza anche maggiore di 100 cavalli furono già costruiti ed adoperati con vantaggio; sarà necessaria soltanto una speciale disposizione degli organi motori per ottenere facilmente il movimento iniziale del treno.

Una difficoltà si presenta solo nella perfetta tenuta del serbatoio e specialmente di quelli ambulanti perchè dovran tenere un gas tanto sottile qual'è l'idrogene compresso a parecchie atmosfere; ma si conosce già che un velo sottilissimo di cautchouk tiene abbastanza bene l'idrogene, or dunque sarà cosa non difficile il costruire tali serbatoi con tutte le cautele immaginabili per la buona tenuta, e spalmarli poi nell'interno con vernice di cautchouk, in guisa da tappezzarne le pareti con uno strato di spessezza doppia e tripla di quella dei comunissimi globi che si veggono enfiati a gaz idrogene, spessezza che giunge appena ad un decimo di millimetro.

L'applicazione prattica di quanto io propongo avrà certamente le sue difficoltà, ma il non vederne a priori se non di natura ordinaria dovrebbe animare alla pruova.

COMUNICAZIONI

STATUTI Prof. A. – *Presentazione di due memorie del Socio D. G. Mazzetti* :

Il Sig. Ing. A. Statuti presentò all'Accademia da parte del socio corrispondente D. G. Mazzetti di Modena sotto il titolo di « Contribuzione » allo studio della geologia delle montagne Modenesi e Reggiane » due memorie manoscritte, l'una « *Intorno alla relazione del terreno di Costa » dei grassi colle arenarie di S. Martino e Ranocchio* », l'altra « *In- » torno alla corrispondenza fra le roccie costituenti le due catene montuose di Montello, Montese , Monteforte , e di Semese , Sassoguidano e » Gaiato* ». Ambedue le memorie sono inserite nel presente fascicolo. Presentò inoltre da parte del medesimo D. G. Mazzetti i seguenti lavori scientifici già pubblicati. 1. Riflessioni intorno agli oggetti preistorici, alla trasformazione delle specie e all'origine ed antichità dell'uomo. 2. Due parole per dimostrare come in oggi si scriva la storia dai moderni scienziati. 3. Intorno alla roccia di un grosso Ammonita, che ha tutto l'aspetto di una roccia nummolitica. 4. Siamo ancora Cristiani? Domanda di David F. Strauss brevemente discussa. 5. La molassa marnosa delle montagne modenesi e reggiane e lo Schlier delle colline del Bolognese. 6. Echinodermi fossili di Montese. 7. Echinodermi nuovi della molassa miocenica di Montese nella provincia di Modena (Manzoni e Mazzetti) . 8. Le spugne fossili di Montese (Mazzetti e Manzoni). 9. Montese, i suoi terreni geologici, le sue acque minerali ed i suoi prodotti.

CASTRACANE Ab. F. – *Presentazione di un opuscolo del prof. S. Rossi*:

Il Presidente presentò da parte del sig. prof. Stefano Rossi un suo lavoro sopra « Le piante acotiledoni vascolari e le graminacee Ossolane » dedicato alla memoria del compianto nostro socio P. Gagliardi. A questo suo bel lavoro l'Autore fa precedere un breve cenno biografico del Gagliardi, nel quale si vede quanto quel nostro socio ebbe a cuore la coltura delle scienze naturali e come fu tenuto in grandissima stima non solo in Italia, ma anche all'estero.

DE ROSSI Prof. M. S. – *Presentazione di note*:

Il Segretario presentò da parte del socio corrispondente prof. P. M. Garibaldi due note a stampa intitolate l'una « *Stato Meteorologico e ma- » gnetico di Genova per l'anno* 1883 », l'altra « *Sulla relazione fra le » macchie solari ed il magnetismo terrestre.* »

COMITATO SEGRETO

L'Accademia adunatasi in Comitato segreto procedette alla votazione delle proposte di due soci corrispondenti sig. Prof. L. Cerebotani e Prof. G. Luvini. Fatta la votazione, ambedue rimasero eletti.

Si venne quindi alla rinnovazione di cariche accademiche scadute di tempo e cioè del Presidente, due membri del Comitato e Commissione di Censura. A presidente venne per acclamazione confermato il Sig. Conte Ab. Francesco Castracane degli Antelminelli, a membri del Comitato Accademico vennero riconfermati i ch. P. G. S. Ferrari e prof. M. Azzarelli. La Commissione di censura rimase confermata per intiero.

Furono approvate le proposte di cambio dei nostri Atti colle pubblicazioni dell'*American Journal of mathematics* di Baltimora e del *Journal de sciencias mathematicas e astronomicas* di Coimbra.

Venne proposta ed approvata una aggiunta al regolamento accademico relativo al caso, nel quale un socio di qualsivoglia classe dell'Accademia venga elevato alla sacra Porpora. Fu stabilito che in tale caso il nuovo Porporato debba passare nella classe dei soci onorari. In seguito a ciò l'Emo Card. Ludovico Haynald Arcivescovo di Kalocsa, socio corrispondente, passa di fatto alla classe predetta dei soci onorari.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. Francesco Castracane, Presidente. – Ing. F. Guidi. – Ing. A. Statuti. – Cav. P. Sabatucci. – Cav. G. Olivieri. – Prof. V. De Rossi Re. – Prof. F. Ladelci. – P. G. Foglini. – Comm. C. Descemet – Prof. G. Tuccimei. – Prof. M. Azzarelli. – P. F. S. Provenzali. P. G. S. Ferrari. – P. G. Lais. – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

AGGIUNTI: March. L. Fonti.

La seduta apertasi legalmente alle ore 3 1/2 pom. fu chiusa alle 5 pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Annales de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro.* — T. II.me Observations et Mémoires, 1882. Rio de Janeiro MDCCCLXXXIII. In-4.°
2. *Archives du Musée Teyler.* — Série II, Vol. II. — Première Partie. — Haarlem, 1884. In-8.°
3. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXX, 1882—83, — Serie III. — Memorie. Vol. XI, XIV, XV, XVI, XVII. Roma, 1883, 1884. In-4.° Serie IV, Rendiconti, Vol. I. — Fasc. 4°, 5.° — Roma, 1885. In-4.°

4. BACHMETIEFF (B. E.) — *Meteorologische Beobachtungen, etc.*, Moskau, 1883. In-4.°
5. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. VI. — Entr. 4ª T. VII, Entrega 1ª, 2ª. Buenos Aires, 1884. In 8.°
6. *Bollettino decadico dell' Osservatorio centrale in Moncalieri.* A. XIII, n.° 4, 6. Torino, 1884. In 4.°
7. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. X. — n. 8. — Roma, 1884. In 8.°
8. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de S.t-Pétersbourg.* T. XXIX, n.° 2. Avril 1884. In-4.°
9. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1883. — n.° 3, 4. — Moscou, 1884. In 8.°
10. *Crónica cientifica.* — A. VIII. N. 170, 171, 172. — Barcelona, 1885. In-8.°
11. GARIBALDI (P. M.) — *Stato meteorico e magnetico di Genova per l' anno* 1883. — Genova, s. a. In 4.°
12. —— *Sulla relazione fra le macchie solari e il magnetismo terrestre.* Roma, 1885. In-4.°
13. *Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jah.* 37. Wiesbaden, 1884. In-8.°
14. *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales* 1882, 1883. Vol. XVI, XVII. Sydney, 1883, 1884. In-8.°
15. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, Serie XII, Vol. IX. — quad. 831, 832. — Firenze, 1885. In-8.°
16. MANZONI (A.) e MAZZETTI (G.) — *Echinodermi nuovi della molassa miocenica di Montese,* 1878. In 8.°
17. MAZZETTI e MANZONI. — *Le Spugne fossili di Montese.* Pisa 1879. In-8.°
18. MAZZETTI (G.) — *Siamo ancora Cristiani? Domanda di D. F. Strauss brevemente discussa.* Modena, 1876. In-8.°
19. —— *La molassa marnosa delle montagne modenesi e reggiane e lo schlier delle colline del Bolognese.* Modena, 1879. In-8.°
20. —— *Echinodermi fossili di Montese.* Modena, 1881. In-8.°
21. —— *Montese, i suoi terreni geologici, le sue acque minerali ed i suoi prodotti.* Modena 1881. In-8.°
22. —— *Intorno alla roccia di un grosso Ammonita, che ha tutto l'aspetto di una roccia nummulitica.* Modena, 1878. In-8.°
23. —— *Riflessioni intorno agli oggetti preistorici, alla trasformazione delle specie, e all'origine ed antichità dell'uomo.* Modena 1873. In-8.°
24. —— *Due parole per dimostrare come in oggi si scriva la storia da' moderni scienziati.* 1878. In 8.°
25. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie littéraire.* — Deuxième série, T. XXI. Première livraison. — Janvier. Paris, 1885. In-8.°
26. *R. Comitato Geologico d'Italia,* 1884. — Bollettino n. 11 e 12. Roma, 1884. In-8.°
27. *Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche.* — A. XXIII, fasc. 10, 11 e 12. Napoli 1884. In 4.°
28. ROSSI (S.) — *Le piante acotiledoni e le graminacee Ossolane.* Domodossola, 1884. In-8.°
29. SELWYN (A.) e DAWSON (G. M.) — *Descriptive Sketch of the physical Geography and Geology of the Dominion of Canada.* Montreal, 1884. In-8.°
30. TOLMIE (W.) e DAWSON (G. M.) — *Comparative vocabularies of the Indian tribes of British Columbia.* Moutreal, 1884. In-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IVa DEL 15 MARZO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ANALISI MICROSCOPICA DI UN CALCARE
DEL TERRITORIO DI SPOLETO

Nel ragionare della pratica utilità dello studio delle Diatomee, e delle diverse possibili applicazioni di quello ai molteplici rami della Biologia e Storia Naturale, più volte io ho avuto occasione di ricordare in particolar modo quanto valido aiuto da quello studio potrebbe trarre il Geologo a conoscere la storia di quelle formazioni ove le Diatomee vennero riconosciute. Fu pertanto ottimo consiglio quello dell'illustre Ehrenberg, quando intitolò la sua grande opera su le diatomee fossili Microgeologia, quantunque mi avrebbe sembrato meglio adatto il nome di Micropaleontografia, se pure non sonasse male la soverchia lunghezza di questo. Ed in fatti a rigore considerando la cosa non mi sembra appropriato l'aggettivo μικρος proposto al nome *geologia* perchè, quantunque si argomenti da minimi organismi, il giudizio viene formulato su la storia di uno strato di un banco di un giacimento di notevolissima estensione; invece il termine di micropaleontologia conviene a quello studio che versa attorno minutissimi organismi, i quali poterono conservarsi o lasciar loro impronte dalle più remote epoche geologiche, e stanno ad attestare al Geologo le condizioni con le

quali ebbe luogo quella formazione. Se pertanto fosse bene impresso nella mente dei Geologi Italiani l'importanza somma, che ha per la conoscenza della storia della formazione della nostra bella penisola il tenere conto dei minimi organismi, dall'enorme agglomeramento dei quali vengono spesso costituiti gli strati, il Microscopio dovrebbe sempre aver luogo fra la supellettile del Geologo. Quantunque non si possa pretendere che il Geologo sia al caso di potere determinare ogni Diatomea o Radiolaria o Policistina, ciò che assorbirebbe troppo tempo, è però indispensabile a mio modo di vedere che senza potere esattamente determinare il genere e la specie di ciascuno di quei minimi organismi, sia però in grado di costatarne la presenza, ricorrendo quindi al Micrografo specialista perchè convenientemente li determini. Il Geologo potrà essere ben persuaso che ove Esso potè appena constatare qualche traccia di corpicciuoli organizzati quegli che ne fece speciale soggetto di studio per l'abitudine e la lunga esperienza acquistata in tali ricerche, potrà con relativa facilità, isolarne un grande numero, così che ne rimarrà maravigliato per la copia, avendone prima intraveduto appena qualche traccia.

Fra i Geologi Italiani, che meglio si mostrarono persuasi della importanza che offrono le Diatomee ad indagare la storia della nostra Penisola nelle epoche già remote merita precipua lode il Professore Dante Pantanelli, il quale riconosciuta la presenza di microrganismi nei terreni che andava studiando, più volte mi ha gentilmente favorito campioni di roccia e materiali da Esso raccolti. Intendo pertanto attestare all'illustre Geologo la mia più viva riconoscenza per la gentilezza usatami con communicarmi quei materiali, avendo con ciò contribuito ad allargare le mie cognizioni su le Diatomee e più specialmente su i depositi Italiani. A Lui si deve l'avere indicato l'esistenza di un deposito di Diatomee e di Radiolarie nell'Appennino settentrionale e precisamente in quel di Modena presso Monte Gibbio e Baiso, e nel territorio Reggiano nella vicinanza della località detta i Quattro Castelli, già signoria della famosa Contessa Matilde e quindi della nobilissima famiglia dei Canossa. Fra i campioni diversi di quei depositi potei constatare l'esistenza di alcuni tipi, che sin ora non solamente non furono noverati fra le forme Italiche, ma talune non vennero pure ricordate nella flora Europea, e a convincere della verità di questo sarà sufficiente argomento il ricordare l'avere io riconosciuto in una preparazione del deposito di Monte Gibbio una nuova specie di Rutilaria, genere il più raro

sin ora fra quanti si conoscono, del quale un esemplare costituisce uno dei più rari gioielli che può vantare una collezione.

Devo pure alla gentilezza del Dott. Pantanelli l'avere acquistato la cognizione di un nuovo deposito di acqua dolce esistente nel territorio di Spoleto nell'Umbria. Esso mi inviava un campione di marna, che mi diceva appartenere al pliocene inferiore, la quale marna era sovraincombente a un banco di lignite dello spessore di ben dieciotto metri, il quale viene ora scavato per utilizzare quel combustibile a pro' di diverse industrie. Alla domanda del cortesissimo Donatore volentieri assunsi l'impegno di determinare i generi e le specie di Diatomee ivi contenute, accingendomi subito all'impresa. Alla prima occhiata che sul il campo del microscopio gettai all'insieme del materiale subito mi apparvero numerose Epithemie e Cyclotelle, ma tutte rimanevano perdute fra abbondantissimo detrito roccioso e non poco materiale amorfo. Alloia procedetti a tentare di liberare le Diatomee della maggiore quantità di quelle sostanze ingombranti trattando il materiale con acido solforico alquanto diluito, con il quale lo feci bollire in un provino, e atteso che ogni sostanza carboniosa venisse ossidata (ciò che veniva indicato dall'annerire del liquido), con l'aggiunta di piccolissimi cristallini di clorato potassico su l'acido bollente si avevano delle decrepitazioni, e in pari tempo dileguavasi interamente il colore nero nel provino, avendo luogo in quello la più completa disossidazione. A questo punto gettato il liquido acido e il materiale contenuto nell'acqua, procedevo a numerosissime accurate decantazioni ad eliminarne l'acido ed i sali solubili e quindi con ripetute lavande in acqua distillata purissima e con successive graduali levigazioni pervenni a fare belle preparazioni di Diatomee quasi perfettamente libere dalla associazione di sostanze estranee.

Ottenuto per tal modo di avere buone preparazioni di quel deposito, senza grave difficoltà procedetti a determinarne i tipi generici e specifici che vi si contengono. Come già dissi le forme più frequenti ad incontrare in quel deposito sono le Epithemie e le Cyclotelle. Le prime attraggono lo sguardo per la grandezza dei loro frustoli, e alla prima occhiata si riconosce esistere fra un tipo e l'altro notevoli differenze, che li dimostrano appartenenti a specie distinte. Ma la bellezza e il grande numero delle Cyclotelle richiamò principalmente la mia attenzione. Queste mi si presentavano sotto l'aspetto di elegantissimi dischi di diverse grandezze; ciascuno mostravasi contornato da larga fascia radialmente striata, larga circa un terzo del raggio. Una tal fascia circoscrive l'area centrale, che vedesi or-

nata da una stella di belle perle disposte quasi regolarmente a raggi con alcuni puntini qua e là disseminati. Un tale tipo specifico di Cyclotella ho posto a confronto con le diverse figure e relative descrizioni che abbiamo riguardanti un tale genere. La larga fascia radialmente striata con stria più forte ricorrente a regolari intervalli la ravvicina alla *Cy. comta*. E. Kz. ma ne differisce completamente nella striazione o granulazione dell'area media. Ed in fatti nella *Cy. comta*, il centro è finamente striato, a strie stipate più o meno radianti: invece nel tipo da noi preso in esame, l'area è elegantemente decorata da perle o grossi e rari granuli in file radianti, in distribuzione meno regolare, notandovisi contemporaneamente interpolati senza alcun ordine alcuni piccolissimi granuli puntiformi. Conosco ancora la *Cy. operculata*, Kz. *var. radiosa*, Grunow, la quale ha l'area centrale striata, ma in questa non si riscontra il carattere dei grossi e rari granuli, nè l'interpolazione irregolare di granuli piccolissimi puntiformi. Se avrei esitato nel riconoscere nella Diatomea Umbra una nuova forma specifica, incontrandone soltanto alcun raro esemplare, però non mi può rimanere alcun dubbio od esitazione nel caso nostro, avendone avanti gli occhi infinito numero di esemplari dotati tutti di identici caratteri. Dovendo pertanto alla gentilezza del Pantanelli la cognizione di questo nuovo elegantissimo tipo nella relativa ristrettezza della flora diatomacea di acqua dolce tanto più accessibile alle nostre ricerche e conseguentemente tanto più cognita della flora marina, tale nuova forma specifica sarà ricordata con il nome di *Cy. Pantanelliana* Cstr. ed eccone la definizione.

Cy, *Pantanelliana*. Cstr. nova species. « *E maximis*: *a latere rectangula, a fronte plana, tertia radii parte circum radiata ; area centrali rariusculis margaritis subregulariter radiata, nonnullis punctulis interpolatis.* »

Le forme diverse di Diatomee sin ora da me determinate nel materiale Spoletino sono le seguenti:

Epithemia Hyndmannii. W. Sm.
» *Zebra*, Kz.
» *ocellata*, Kz.
» *proboscidea*, Kr.
Cocconeis Placentula. E.
Cyclotella Pantanelliana. Cstr. n. sp.
Cymbella cuspidata. Kz.
» *obtusiuscula*, Kz.
» *gastroides*, Kz.

» (*Cocconema*) *Cistula*, E.
Pinnularia acuta, W. Sm.
» *radiosa*, W. Sm.
Navicula ovalis. W. Sm.
Fragilaria (*Odontidium*) *Harrisonii*, W. Sm.
Gomphonema Vibrio. E.
» ? *curvatum*. Kz.

Con questo breve elenco di Diatomee non intendo per alcun modo indicare che quelle siano le sole forme racchiuse in quel deposito, non essendomi in verun modo proposto il redigere un lavoro monografico, mentre invece volli soltanto dare un saggio dei tipi ivi inclusi, ricordando in partieolar modo i tipi che sono dominanti in quel materiale, e che gli imprimono una speciale fisonomia. Tali sono sopra tutte le diatomee le numerosissime Cyclotelle, e le forme diverse di Epithemia. Però oltre quelle merita speciale menzione la *Fragilaria* (*Odontidium*) *Harrisonii*. W. Sm. e per l'eleganza dei suoi frustuli cruciformi, e per la rarità di tale tipo. Questo da principio venne dall'illustre W. Smith (*Synopsis of the Britisch Diatomaceę*, II, pag, 18) con qualche riserva denominato *Odontidium*? *Harrisonii*, notando però che i caratteri forse potevano farlo riguardare come appartenente al genere *Staurosira*. E. In seguito il D.r Rabenhorst avendo riunito il succitato genere alla *Fragilaria* ritenne il tipo Smithiano riguardandolo come *Fragilaria Harrisonii*, quantunque la disposizione a file a zig zag avrebbe meglio dovuto ascrìverlo alle Tabellarie (Rabenhorst=*Flora algarum Europearum*, vol. I. pag. 18.) Questa Diatomea e forse la nuova specie di *Cyclotella*, per la di cui presenza il deposito, che ho preso ad esame, dovrà essere ricordato fra i più interessanti depositi di acqua dolce. Nè potrebbe aver luogo alcun dubbio nel riguardare quel deposito prettamente di acqua dolce , non essedovi tipo alcuno, il quale non venga di leggieri riconosciuto come proprio della flora terrestre, come apparirà a chiunque sia appena famigliarizzato con la conoscenza di tali organismi. Ma, quando lo studio di questi minimi organismi verrà seguito con serietà di propositi, possiamo essere certi, che dall'esame delle forme diatomacee , che si riconosceranno far parte di alcun deposito si potranno dedurre più particolarizzate notizie su le circostanze, che esercitarono la loro influenza su quella formazione. Trovo registrato nelle mie memorie l'avere per più anni raccolto abondantemente l'*Achnantes ventricosa*. E. da una piccola sorgente in quel di Gubbio mentre in altre sorgive site nel medesimo terreno e a pochi metri di distanza mai potei fra

le altre Diatomee incontrare un solo esemplare di quella rara specie. Chi potrà pertanto persuadersi che non vi sia a tale anomalia una ragione suficiente, sia della diversità dello strato, dal quale fluiscono quelle acque, sia da diversa costituzione chimica del terreno ? L' illustre micrografo Alfonso de Brebisson mi diceva di avere osservato che il *Gomphonema geminatum*, Ag. suole incontrarsi inquelle località ove abonda il principio calcare. Ne mancherebbero altri esempi a dimostrare come circostanze locali di costituzione di terreno, condizioni di temperatura, relativa altezza sul livello del mare e conseguente differenza di pressione barometrica siano meglio favorevoli alla vegetazione di una che di altra specie, cosichè dalla qualità delle Diatomee facenti parte di uno strato geologico si possa arguire le circostanze speciali, nelle quali tal formazione ebbe luogo. Intento a ricercare utili applicazioni dello studio al quale mi dedicai, volli vedere se dall'analisi microscopica istituita nel materiale Spoletino potessi divinare le circostcnze sull' influenza delle quali ebbe lnogo quel deposito; ponendo a confronto le mie deduzioni con le osservazioni stratigrafiche e peleontologiche che l'esimio Professore Pantanelli su la faccia del luogo aveva dovuto fare con più sicuro giudizio.

Indirizzatomi pertanto all' illustre Geologo per dargli conto delle forme diverse da me determinate in quel deposito, ed in pari tempo sottoponendogli le mie deduzioni perchè le cimentasse con i criteri geognostici da Esso raccolti, ecco quanto in proposito mi scrivea in data del 12 Marzo. « Ella si è apposto bene ritenendo che le Diatomee Spoletine provennero » da un ampio lago ; infatti appartengono alla vasta deposizione lacustre » della valle del Maroggia, che poi si continuava con quella di Foligno e » probabilmente con quella dell'alto Tevere : ivi lo spessore dei depositi » lacustri ascende a qualche centinajo di metri e i pochi molluschi ivi rac» colti confermano quello che Lei ha detto per le Diatomee. Il calcare o » marna calcarea a Diatomee è sovrapposta a un banco di lignite di 18 » metri di spessore. Non doveva poi essere come Ella dice molto elevato » sul livello del mare pliocenico 1° perchè la sua grande estensione male » si accorda con la orografia pliocenica, che non comportava in quel pe» riodo vaste estensioni di terre emerse. 2° perchè il pliocene marino nella » valle del Tevere (S. Gemini, etc.) è ad una altezza superiore a questi de» positi. »

Non occorre certamente che io mi trattenga guari a dire qual piacere io provassi nel leggere quelle parole. L'assicurazione che il giudizio da me

formulato dalla ispezione e determinazione dei microorganismi esistenti in quel materiale fosse consentaneo al vero, la quale assicurazione autorevolissima veniva appoggiata ad argomenti del maggior peso dedotti dallo studio accurato della località per parte dell'illustre Geologo e Paleontologo nel dovere dar conto dello scheletro di due Mastodonti e di un Tapiro rinvenuti fra quelle ligniti, mi convinceva essermi io bene apposto nel giudicare della importanza che può avere lo studio delle Diatomee per il progresso della Geologia. Un tale esempio di perfetta consonanza fra le osservazioni del Micrografo e le indicazioni stratigrafiche e paleontologiche, se non mi inganno, varrà a persuadere il Geologo della opportunità di rintracciare nel campo delle sue ricerche e peregrinazioni la presenza di minimi organismi, invocando alla circostanza l'aiuto dello specialista a meglio determinarli. Così pure il Micrografo dall'esempio addotto potrà essere eccitato a imprimere al proprio studio una direzione tale, che possa servire al progresso di altri rami di Scienza, se non anche a pratiche applicazioni a benefizio del civile consorzio.

È proprio delle verità tutte che più o meno dapresso l'una dall'altra dipendano come che sono emanazioni del sommo Vero. Così qualunque ramo di Storia naturale, che si prenda a coltivare, quando lo studio ne venga fatto con serietà di propositi, non tarderanno guari a far conoscere i legami che stringono l'uno all'altro cosichè siasi da attendere utili applicazioni da qualunque specialità, cui ci dedicammo. Queste applicazioni scaturiscono spontanee a misura che veniamo meglio ad approfondire lo studio intrapreso, ricercandone le attinenze. Però l'ordine logico evidentemente richiede che la cognizione di una cosa preceda la sua utilizzazione, e non viceversa. Ma le Diatomee, le quali ci sono note soltanto da pochi lustri, cioè dal momento che specialmente per l'opera del Modenese Professore Gio. Batt.ª Amici si potè ottenere ottimi microscopi acromatici, quelle fra le tante maraviglie del microcosmo ci vennero rivelate dal prezioso istrumento, ma non furono studiate se non che da pochi, e lo studio che se ne fece per lo più non venne diretto se non che alla determinazione e descrizione dei diversi tipi. Non è pertanto da maravigliare se tutt'ora la Diatomologia venga riguardata quale studio di puro lusso. Che però tale non sia questo studio ritengo che fra li altri argomenti che potrebbero opportunamente addursi l'esempio citato valga a dimostrarlo in ordine alla Geologia. Possa una tale verità imprimersi nella mente di quanti con lodevolissimo impegno si dedicarono alla coltura di una Scienza, la quale ad onta che sia la piu giovane fra tutte ora grandeggia fra le Scienze sorelle.

F. Castracane.

ILLUSTRAZIONE DI DUE MONUMENTI EGIZIANI

MEMORIA

DEL PROF. FRANCESCO LADELCI

Signori Accademici

Nei diversi lavori che nelle accademiche sedute degli anni scorsi ho avuto l'onore di presentare mi si è data occasione di far rilevare l'attività grandissima vitale di cui sono dotati tutti gli esseri organici, non esclusi anche quelli di più semplice struttura e di piccolissima mole, come sono le piante crittogame, fra le quali sono più considerevoli i microfiti, e nel regno animale i microzoidi.

Per quanto mirabile però ci si mostri questa vitale attività nella materia organizzata, non minore sorpresa ci arreca l'azione di cui è dotata la materia stessa inorganica; sia nei grandi corpi celesti, per il loro moto violentissimo di rotazione, od anche di traslazione; sia nelle singole loro molecule componenti per la forza di coesione, e di chimica affinità che esse posseggono. E si osserva ancora che la detta forza od attività della materia inorganica tanto più in essa si manifesta, quanto più è suddivisa; così che diviene massima allorchè è ridotta allo stato che i fisici han chiamato imponderabile, nel quale vengono specialmente compresi la luce, il calore, l'elettrico, il magnetico; relativamente ai quali, ed alla loro azione o cosmica, od universale, io rammentava ancora come i moderni fisici avessero riconosciuto conveniente quanto pensato già avevano gli antichi; di ammettere cioè l'esistenza di un solo ente attivo che, a seconda de'suoi stati e moti vibratori, ci si presenti sotto le varie apparenze, e ci offra i variatissimi fenomeni o luminosi, o calorifici, o magnetici, od elettrici, o chimici, o di attrazione..... ed infine anche i così detti vitali negli organici. Questo ente è stato da essi fisici distinto con il nome di etere universale.

Di fatti, per ciò che riguarda gli esseri organici, tutti i più accreditati fisiologi han riconosciuta la necessità di ammettere in essi, oltre la materia visibile, anche un'altra invisibile, sottilissima, eterea, senza la quale non si potrebbero spiegare molti fenomeni e fisiologici e patologici che in essi si eseguiscono. Ed è così che Ippocrate espresse l'etere vitale con il nome di spirito = Caeterum caro augescens a spiritu articulatur. = Il Blumembak lo comprese nella frase di *nisus formativus*; e l'Helmonth lo denominò *archeo*, che pur significa forza, potenza; ed il Baglieri riconobbe non potersi rinvenire nelle sezioni anatomiche = Humana vita (egli dice) nutritur et

coalescit quadam aura, quae anatomico cultro haud quaquam subijcitur. = Parimenti molti altri autori variamente denominarono questo ente vitale con gli appellativi di spirito vitale, fluido nerveo, elettricità animale, fluido magnetico animale, come può vedersi nelle opere dell'Harveo, del Bartolino, dello Spigelio, del Wiussen, del Villis, del Borelli, del Boerhave, dell'Haller, del Galvani, del G. P. Frank, e dei più recenti ancora, fra i quali il chiarissimo Bufalini nella sua opera = Patologia analitica = si esprime così = Pare realmente che, o calorico, o luce, od elettrico; o che che sia altro sottilissimo imponderabile principio, entri di continuo nella nostra macchina, o vi si produca; e che, rapidamente scorrendo ne'minutissimi suoi canali, ne governi in modo assai poderoso le azioni vitali. =

Considerando quindi la struttura dei vegetabili, e degli animali, io argomentava, che il detto etere vitale, svolto in ogni organica molecula, per il contatto di sostanze di natura diversa, e per le continue composizioni e decomposizioni chimiche, ed in fine per l'attrito prodotto specialmente dalla rapidissima circolazione dei fluidi venisse raccolto, e trasportato nell'intero organismo per mezzo dei filamenti vascolari nei primi, e per i filamenti e cordoni nervosi nei secondi. In questi poi, è dimostrato con prove di fatto che dal comune sensorio l'etere stesso vitale, per mezzo dei nervi per ciò stesso distinti con il nome di abduttori, nuovamente è trasmesso in tutti gli organi, in tutti gli organici tessuti, dal che sempre nuova vigoria vitale essi acquistano, non solo per l'esercizio delle funzioni semplicemente organiche, che sono indipendenti dalla nostra volontà; ma ancora per quelle organico-animali; subordinate cioè all'impero dell'anima; e così da questa reciproca azione, e da questo perenne circolo proviene quel = consensus unus, consentientia omnia = e l'altra massima fisiologica = in humano corpore omnia simul principium et omnia finis = che stabilì l'antico padre della medicina Ippocrate di Coo.

Ciò che ora più m'interessa di rammentare si è che il detto etere vitale negli animali, non solo sostiene le vitali funzioni, ed è trasmesso nelle varie parti del corpo; ma può essere trasmesso ancora da uno ad altro individuo, e ciò rendesi forse necessario segnatamente nelle funzioni reciproche, come sono quelle che riguardano la riproduzione della specie.

È questo appunto il fatto di somma importanza fisiologica, che io mi propongo confermare con la interpretazione di due monumenti archeologici provenienti dall'antico Egitto, che io sottopongo all'ammirazione de'miei Colleghi Accademici; essendo che in essi, per quanto a me sembra, vengono contenute ed espresse le cognizioni tutte fisiologiche che oggi si hanno in-

torno la generazione; non esclusa la detta trasmissione dell'etere vitale dall'uno all'altro sesso nell'atto del concepimento di un nuovo essere organico.

Prima di descrivere questi due monumenti è necessario che io rammenti che l'Egitto fu sempre considerato dagli antichi come la scuola la più rinomata in materia di politica e di sapienza; e come la origine della maggior parte delle arti, e delle scienze. = Le sue più nobili fatiche, dice il Rollin, e la sua più bell'arte consistevano nell'istruire gli uomini. La stessa Grecia di ciò consapevole inviava i suoi più eruditi uomini, come Omero, Pittagora, Platone, Ippocrate, Licurgo, Solone e molti altri nell'Egitto a fine di perfezionarsi, e di apprendere in ogni genere di letteratura e di scienza le cognizioni le più rare. Iddio stesso nelle sacre pagine rese glorioso attestato a Mosè lodandolo per essere stato istruito in tutte le scienze degli Egizi. = Sin qui il prelodato istorico. Per altro questa scienza non era gittata in piazza, come si fa a nostri giorni per deturparla e riempirla di errori; ma era gelosamente custodita dai sacerdoti, i quali, solo per mezzo di un linguaggio loro proprio, e di gerogrifici, al pubblico inintelligibili, la comunicavano solo a coloro che allo studio delle scienze si dedicavano. = La figura di Herpocrate, od Oro, dice lo stesso Rollin (qualunque sia la interpretazione data dai più recenti mitologi a questa divinità) che nei santuari egiziani, col dito disteso sulla bocca vedevasi, pareva avvertisse rinchiudersi in essa misteri, la di cui cognizione non era a tutti permessa. =. Adunque i gerogrifici, de'quali erano ornati i sontuosi obelischi, le colonne, i fregi delle cornici, le basi delle statue; e segnatamente i monumenti posti nell'interno dei tempi, e delle abitazioni sacerdotali, non erano solo storiche descrizioni, o rappresentanze mitologiche; ma erano destinate eziandio a racchiudere le cognizioni scientifiche le più recondite.

Ciò posto, vengo alla interpretazione, che a me sembra la più naturale dei detti due monumenti, desunto il primo da uno dei brani delle tavole marmoree, con figure colorate in rosso e nero, i cui *facsimile*, in tre distinti grandi fogli, furono inviati dalla Spagna anche in Roma nel 1854. Le dette tavole marmoree furono in quell'epoca rinvenute presso Tarragona, nell'eseguirsi dei profondi scavi, ed ora sono conservate in Madrid nell'Accademia dell'Istoria. (V, Tav. 1.ª)

Lo stile, i costumi, i caratteri come sono questi rappresentati li han fatti riconoscere da tutti gli archeologi provenienti dalla Fenicia. È ben noto quanta intima relazione passasse fra Tiro specialmente e Cartagine, e quali rapporti commerciali, e poi di dominio vi fossero fra l'Egitto e la Spagna, il cui passaggio, dall'una all'altra regione e bene espresso in uno dei detti frammenti.

Quello da me interpretato, e che ritengo rappresentare i fenomeni della generazione, è esposto così, quale si vede nella copia qui annessa.

Il centro di questa tavola ci offre due figure umane, un uomo cioè ed una donna poste di prospetto l'una dell'altra. Dietro l'uomo v'è un palmizio da dattoli (Phoenix dactilifera L.) ma senza frutto, ciò che indica in esso il sesso maschile, essendo questa pianta *dioica*. Dietro questo palmizio vedesi un serpente alato, eretto, e con le corna, forse invece delle orecchie di cui è dotata una specie di vipere egiziane. Così fu descritto da Ovidio il serpente sacrato a Marte, ed ucciso da Cadmo

» ubi conditus antro
Martius anguis erat, cristis praesignis et auro ».

che l'Anguillara tradusse con elegantissimo verso

« Di creste d'oro orribilmente adorno ».

Intanto questo carattere lo indica dello stesso sesso maschile, come l'uomo ed il detto palmizio. Dall'altra parte, dietro la figura della donna, vedesi una palma coi frutti; vale a dire di sesso femineo, ed a tergo di questa una serpe anche eretta, che è senza corna, ed ha le mammelle protuberanti; così che in essa ben si distingue il sesso femineo. Un ala superstite nel frammento, e posta più in alto, sembra indicare che anche gli uccelli erano compresi in questa tavola dimostrativa. – Superiormente poi vedesi il sole raggiante, con alcune stelle, ed i segni dello zodiaco, de' quali però resta solo il pesce. Tra l'uomo e la donna in basso vi è rappresentata una fiamma. Dall'ipogastrio dell'uomo parte una linea ricurva che, toccato il ventre della donna, si ripiega sopra se stessa formando una larga spira, nel centro della quale vedesi un volto umano, risultato della fecondazione. E che qui si tratti di questa vitale funzione è ben confermato dal fluire del latte dalle mammelle della donna, espresso con varie linee punteggiate, che a guisa di pioggia, dai capezzoli scendono in basso. Quello poi che è più singolare in questo frammento si è il vedere che negli interstizi della detta spira sono figurati tanti piccoli animali di varie forme e grandezze, diretti tutti verso il centro della spira stessa, ma in posizioni diverse, a seconda delle loro forme e dei vari movimenti che essi possono eseguire, come veggonsi i microzoidi infusori che hanno moti vivissimi; per lo che, ammesso che qui realmente si tratti dei fenomeni della generazione, su di che nessun dubbio hanno espresso gli archeologi tutti cui io ho manifestata questa mia interpretazione, io debbo ravvisare nei detti animalculi i zoospermi che ci presenta l'umor seminale virile.

Inoltre, ed è ciò che fa più a proposito della mia tesi, veggonsi nella stessa tavola tanti piccoli volatili che dalla bocca dell'uomo vanno a quella della donna, e ciò per esprimere che nell'atto della fecondazione, anche un *quid* di volatile, che noi diciamo etereo, si comunica dall'uno all'altro sesso. Ed invero se questo fluido vitale è essenziale, e da esso solo dipendono le vitali funzioni individuali, è ben ragionevole il riconoscere che di questo stesso fattore debba esservi comunicazione nelle vitali funzioni reciproche; ove cioè rendesi necessaria la concorrenza dei due sessi.

La presenza del serpente e della palma indicherebbe che quanto avviene nell'uomo accade ancora in tutto il regno animale ed in quello vegetale; preso per tipo del primo il serpente, del secondo la palma; e tutto ciò sotto la influenza, e con il necessario concorso dell'etere fisico espresso con la presenza delle stelle, della luce solare, e della fiamma, che abbiamo veduta interposta fra le dette figure; essendo che l'assenza di questo agente cosmico, ed universale porterebbe la cessazione del moto, e quindi della vita non solo degli organici; ma ancora di quella di tutto il creato.

Relativamente ai detti zoospermi io non pretendo sostenere che gli antichi Egizi possedessero il microscopio col perfezionamento cui oggi si è portato, ma dico solo che, se essi sorpresero tutte le altre nazioni con le gigantesche architetture costruite dai successivi Faraoni nei ricchissimi tempi, e nelle necropoli di Said, di Tebe, di Menfi, di Abiad, di Eliopoli....; e se essi ebbero perfetta cognizione dell'astronomia, come vedevasi chiaramente nel sontuosissimo monumento sepolcrale eretto alla memoria di Osimondio, che secondo il detto Rollin appartenne alla prima epoca storica dell'antico Egitto, e dice che questo sepolcro era recinto da un cerchio d'oro che avea un cubito di larghezza, e 365 cubiti di circonferenza; sopra ciascuno de'quali era segnato il levare ed il tramontare del sole, della luna, e delle costellazioni in ciascun giorno dell'anno: perchè sin d'allora gli Egizi lo dividevano in 12 mesi, ciascheduno di 30 giorni, e dopo il dodicesimo mese ad ogni anno aggiungevano cinque giorni e sei ore. E così ancora, se gli Egizi raggiunsero la perfezione nell'agricoltura, e nella idraulica, ed in tutte le arti meccaniche ed industriali, come può vedersi nelle raccolte di oggetti, e di manifatture che si conservano nei pubblici musei egiziani; si può dubitare che essi usufruissero di questi per il progresso ed il perfezionamento anche scientifico? E quando io osservo che fra i detti oggetti trovansi utensili di vetro che presentano forme concave e convesse; come globi per collane, e bottiglie globulari per contenere i liquidi, io

non debbo escludere affatto l'idea che potessero essi servirsi di questo mezzo e di questa sostanza per ottenere un'ingrandimento dei piccoli oggetti.

Ma posta da parte tale questione, se nel *facsimile* sono tutte le parti di questa tavola fedelmente riprodotte; può darsi ai detti animalculi altra interpretazione che quella dei zoospermi ? Io la credo la più confacente, e la più naturale al soggetto ove essi sono posti.

Il fatto però che più interessa la mia tesi, come già dissi di sopra, è la presenza dei piccoli volatili, che dalla bocca dell'uomo passano a quella della donna, per significare che nell'atto della fecondazione anche un *quid* di volatile, etereo, invisibile si comunica dall'uno all'altro sesso.

Ora questo stesso fenomeno, a me sembra essere stato espresso ancora nell'altro monumento che è riportato nella Illustrazione istorica monumentale del basso ed alto Egitto dal P. Domenico Valerani. (V. Tav. 2.ª)

Questo è rappresentato in una scultura in rilievo posto in una volta di una sala annessa al maggior tempio di Tentira ; borgo dell'alto Egitto nella Tebaide, ove conservasi intatto il tempio d'Iside. = La bellezza indicibile del lavoro (dice il Valerani) tanto architettonico quanto ornamentale, induce a credere che fosse eretto sotto il regno del primo dei Tolomei. Esso tempio quadrilungo è tutto di pietra bianca. Grosse colonne, ricche cornici, gerogrifici a profusione, ampio vestibulo, sale molteplici, bassirilievi storici, processioni sacre, riti misteriosi, il tutto ben rappresentato fanno di questo tempio il più importante edifizio superstite dell'antico Egitto.

Or bene anche in questo bassorilievo a me pare che venga rappresentato il fenomeno fisiologico della trasmissione dell'etere o fluido vitale dall'uno all'altro sesso nell'atto della fecondazione.

Le due figure ivi scolpite sono poste in una posizione veramente bizzarra ; sebbene con la massima decenza per l' atto che rappresentano. L'uomo giace supino sul suolo con un braccio disteso verso i piedi, e l'altro nella direzione opposta. È poi ripiegato sopra se stesso alla metà del corpo, in modo che i piedi superano la testa. Dai suoi lombi, e da tutta la superficie della parte superiore della figura partono tante linee raggianti che raggiungono la superficie anteriore del corpo della donna, la quale è posta in forma di arco, ben distante dall'uomo, essendo la figura di lei grande al doppio di quello. Nel ventre della donna veggonsi degli ovuli co'relativi geni, ed uno nel centro fecondato, i cui geni genuflessi pare che preghino per il felice sviluppo del feto.

Anche qui l'attitudine delle figure, le dette linee raggianti, l'ovulo fecondato nel ventre della donna fanno chiaramente conoscere trattarsi dei

fenomeni della generazione, e ciò viene pienamente confermato da quanto può leggersi ancora nei caratteri posti negli spazi fra le dette linee, de'quali caratteri così ne parla l'egregio professore Orazio Marucchi il quale, dietro mia richiesta, ha gentilmente annuito per la interpretazione di questi gerografici. = I caratteri, egli mi dice in una sua lettera, forse malamente copiati, e con moltissime lagune, sono poco intelligibili, e solo vi si conosce con sicurezza, ripetuta più volte, la parola *Keper* che significa generare, creare, produrre..... = Quindi nessun dubio può restare intorno al significato del soggetto che espongo.

Soggiunge poi lo stesso archeologo nella detta lettera: = La rappresentanza figurata si può spiegare benissimo col confronto di altre già note. Noi sappiamo che nei tempi ove era adorata una triade divina si rappresentava talvolta la dea che avea partorito la terza persona di quella triade, e spesso questo giovane dio simboleggiava il re, assimilato, come è noto, alla divinità..... Il nostro basso rilievo a me pare rappresentare Iside che ha partorito Horm, ed è quindi identificato con Hathor, la dimora di Horm, ed esprime il concetto cosmico dell'ambiente celeste entro cui il sole agisce. Nel ventre della dea si vede l'uovo contenente il fèto, ed anche alcuni geni adoranti, e questo gruppo è ripetuto in altre parti del monumento. Mi pare dunque che questa scena si possa spiegare con il noto simbolismo dell'arte egizia. =

Io ammiro la dotta interpretazione del sullodato archeologo; ma astrazione fatta dalle favole mitologiche, conoscendo che i sacerdoti egizi erano versatissimi nelle scienze anche mediche, e che esprimevano la loro dottrina per mezzo di figure e di gerogrifici; e seguendo i lumi che ci somministra la fisiologia, trovo conveniente e naturale dare al detto rilievo una interpretazione che all' apparenza mitologica unisca la importanza scientifica. Io non posso così facilmente persuadermi che i dotti della Grecia, e segnatamente i medici, intraprendessero il disastroso viaggio dell'Egitto a solo fine di conoscere la favolosa mitologia egiziana, od i riti sacri di quella nazione spesso anche ridicoli, ma le addotte ragioni piuttosto mi persuadono cha i sacerdoti realmente possedessero recondite cognizioni scientifiche, e che, a solo fine di conoscere queste i dotti greci colà si trasferissero.

Sia pure che la figura dell'uomo rappresenti il sole, e non vi pare o Signori di vedere nei raggi che emanano dal suo corpo, e che si dirigono a quello della donna gestante la influenza necessaria dell'etere calorifico e luminoso per la vitale funzione che ivi si compie? Siccome però questo etere deve necessariamente venire modificato segnatamente ne'suoi movimenti,

negli esseri organici, a seconda della natura di questi e delle funzioni vitali che in essi si producono, come già sostenni nella tesi sulla vita delle piante; così, emanando in questo monumento non dal disco solare, come lo abbiamo veduto espresso nella prima tavola; ma dal corpo di una figura umana, dovrà dirsi etere vitale o *zoodinamico*, come nella detta tesi lo denominai, per distinguerlo dall'etere che vivifica le piante che dissi *fito-dinamico*, e da quello che dà moto e vita al regno inorganico che espressi col nome di etere *fisico-dinamico*.

Così ancora sia pure che nella figura della donna venga rappresentata Iside, come giustamente riconosce lo stesso archeologo, essendo a questa dea l'annesso tempio dedicato; o sia che possa anche ravvisarsi in essa la dea Nouth, simbolo della terra, come lo interpreta il nostro socio accademico il commendator Descemet, resta sempre fermo che essa, nell'atto in cui è posta, viene influenzata dall'azione virile; e che l'ovulo fecondato che presenta nel seno fa conoscere che qui si tratta piuttosto del concepimento, di quello che di un parto compiuto. Viene dunque confermato anche in questo rilievo che al compimento della vitale funzione per la perpetuazione degli individui, e quindi delle specie, è necessaria la trasmissione dell'etere vitale fra i due generanti; lo che noi abbiamo veduto espresso ancora nella tavola tarragonese con la presenza dei piccoli volatili che dalla bocca dell'uomo passano a quella della donna. In questa poi abbiamo anche osservato che tutto il complesso delle figure chiaramente esprime lo stesso concetto della fecondazione nei due regni organici, il vegetale cioè e l'animale. Alla quale dottrina se si unisce anche quella della scoperta dei zoospermi, e della necessaria influenza dell'etere fisico, espresso con la presenza dei corpi celesti, e della fiamma, affinchè si possano effettuare le vitali organiche funzioni, dovrà convenirsi che gli antichi Egizi realmente possedessero, almeno in questa importantissima parte fisiologica, le cognizioni tutte che intorno ad essa oggi si hanno, e che forse da taluni credonsi nuove; ond'è che anche qui, come in altre parti si verifica il detto di Orazio = Multa renascentur quae jam cecidere = Che se dagli archeologi e dagli altri scienziati vengano queste interpretazioni approvate, tanto più interessante riuscirà la ricerca degli oggetti e dei monumenti egiziani, in quanto che noi potremo in essi rinvenire non solo ciò che riguarda i costumi, la storia, ed i riti degli Egizi; ma ancora le loro cognizioni e le scoperte scientifiche, che elevarono a tanta fama questa ora sventurata nazione, abbrutita dall'islamismo, e resa preda del primo occupante.

COMUNICAZIONI

Provenzali P. F. S. – *Presentazione di un opuscolo di Monsignore Grassi Landi*:

Il P. Francesco Saverio Provenzali nell'annunziare un nuovo opuscolo (1) di Monsignor Bartolomeo Grassi Landi sulla musica considerata sotto il rapporto scientifico, fece notare che fino dal 1881 avea egli informata l'Accademia come il Grassi, colla scoperta della legge dei *raddoppi* sì interi che frazionari delle vibrazioni che generano i suoni piacevoli, avea posto il fondamento alla teoria degli accordi e della naturale successione dei suoni armonici.

Venendo quindi a dar conto del nuovo opuscolo il disserente mostrò che l'autore, coll'altra sua recente scoperta, ha sperimentato che i passaggi alle diverse specie di tonalità si fanno per mezzo di tre specie di ritmi, che risultano dai raddoppi di quarti e di terzi negli accordi maggiori e di sesti nei minori, è pervenuto a completare la teoria fisica dell'armonia e del contrapunto, come pure a fissare quale debba essere il diapason o corista da scegliersi come norma per l'accordatura perfetta delle voci e degli strumenti. Conchiuse coll'augurare all'autore che dopo avere trovata la causa fisica della piacevolezza dei suoni armonici, che è l'anello di congiunzione fra la teorica della musica e la pratica, possa presto coglierne il frutto, applicando i nuovi principii teoretici alla pratica per vantaggio degli studiosi e perfezionamento dell'acustica.

Galli Prof. D. I. – *Presentazione di una sua memoria.*

Il Prof. D. Ignazio Galli, riferì intorno ai numerosi fenomeni sismici da lui raccolti nell'osservatorio fisico-meteorologico di Velletri durante il periodo sismico della Spagna meridionale. Egli, oltre a molti altri strumenti di vari sistemi, si serve del *Sismodinamografo*, il quale registra continuamente e separatamente i moti ondulatorii e sussultorii di qualunque intensità con traccie proporzionali al valore dinamico e all'ora precisa in cui avvengono; e per le scosse non molto deboli, fornisce indicazioni degli altri elementi, cioè direzione esatta, rombo di provenienza ecc., e in certi casi straordinari anche la forza dell'urto in unità dinamiche. La più importante proprietà dell'istrumento sta in ciò, che appena segnata la traccia di una scossa torna quasi istantaneamente in quiete, cosicchè è sempre pronto a

(1) Questo opuscolo è stato impresso nella tipografia Vaticana, nuovo argomento che il S. P. Leone XIII non lascia passare occasione alcuna per promuovere i buoni studi specialmente nel clero.

registrare distintamente tutti i fenomeni che avvengono anche a breve distanza di tempo, come sarebbero gli urti ch'egli chiama microsismici, dei quali si hanno da due a cinque centinaia all'ora.

Ora nel periodo dei grandi terremoti spagnuoli il sismodinamografo ha mostrato un'abbondanza straordinaria di piccole scosse, con tale variazione di frequenza e con tali aggruppamenti, da rendere evidente la loro connessione coi fenomeni disastrosi della penisola iberica, come apparisce da un quadro statistico che il Galli presenta. Dallo stesso quadro risulta che i massimi di frequenza sono in relazione colla distanza e colla declinazione della luna, come lo stesso prof. Galli aveva trovato in altri periodi sismici. Questi ed altri risultati verranno esposti e discussi nella memoria che egli sta preparando per le pubblicazioni accademiche. Terminò accennando i molti esperimenti da lui fatti per assicurarsi che gli strumenti sismici dell'osservatorio veliterno sono collocati in eccellenti condizioni di solidità e che non risentono l'effetto di cause estranee accidentali. (1)

Il medesimo prof. Galli, oltre al suddetto quadro statistico, presentò anche il disegno del sismodinamografo; ed invitò i presenti a richiedergli schiarimenti ed aprir la discussione, ove credessero opportuno, sopra le cose da lui accennate.

Il Prof. de Rossi allora ricordò d'aver mostrato la sua stima e le sue speranze intorno al Sismodinamografo fin dal 1881 nel Congresso meteorologico di Napoli, allorchè il Galli per la prima volta ragionò degli esperimenti che egli avea in corso su quell'istrumento. Aggiunse poi che l'odierna luttuosa circostanza dei terremoti di Spagna ha servito a dare una prova sperimentale sull'attendibilità dei dati forniti da quell'apparecchio indipendentemente dall'analizzarne le condizioni statiche di collocamento. Basta vedere all'ingrosso come l'attività spiegata dall'istrumento dopo parecchi anni da che funziona, sia avvenuto in un tempo non solo così caratteristico per i terremoti di Spagna, ma eziandio mentre è evidente per altri dati, che il suolo d'Italia ha risentito l'eco delle commozioni telluriche iberiche. Lo strumento del Galli avendo fornito segni di agitazione in Velletri assai maggiore e continua che in qualunque altro luogo, mostra che seppure la regione in cui esso si trova fosse stata più delle altre d'Italia commossa, sarebbe stato sempre pregio del sismodinamografo l'averne tanto dettagliatamente rivelate le fasi. Aggiunse poi che senza aspettare le prove teoriche sperimentali

---

La memoria estesa viene inserita nel I° volume delle memorie dell'Accademia.

che darà il Galli delle funzioni del suo sismodinamografo, basta osservare come l'odierna serie delle indicazioni di quell'istrumento, oltre al coincidere coi suddetti terremoti di Spagna, coincide pure con spessi piccoli terremoti avvertiti in Velletri stessa e taluno nei vicini Monti Lepini. Simile agitazione straordinaria il de Rossi riferì essersi verificata nei vicini osservatorii laziali di Roma e di Rocca di Papa, fra i quali i secondi sono collocati in profondità sotterranee, esenti senza dubbio da qualsiasi supponibile disturbo accidentale sia fisico, sia meccanico. E finalmeute lo stesso graduale passare dal minimo al massimo e viceversa la serie delle indicazioni del sismodinamografo disse mostrare essere esse l'effetto d'una causa diversa dalle azioni locali, che non potrebbero mostrare nè tali differenze tra giorno e giorno, nè tali regolarità di andamento.

Lanzi D.r M. – *Presentazione di un suo opuscolo.*

Il Dott. Matteo Lanzi presentò all'accademia un suo opuscolo, il quale contiene un elenco dei funghi nascenti nel territorio della flora romana. Ammontano a circa quattrocento specie, sebbene egli ritenga che debbano essere in numero molto maggiore. Ricordando i precedenti lavori di altri micetologi, che descrissero i funghi romani, disse di avere compreso in tale elenco soltanto quelli da lui veduti. Oltre al nome dei generi e delle specie, classificati secondo il sistema esposto dal Prof. Winter nella seconda edizione della flora Crittogamica del Rabenhorst ch'è tutt'ora in corso di pubblicazione; vi si legge il tempo e il luogo in cui furono raccolti ed il nome volgare di quelli che lo hanno.

De Rossi M. S. – *Presentazione di un opuscolo del socio prof. Ragona.*

Il segretario presentò da parte dell'autore Prof. D. Ragona, socio corrispondente, un opuscolo intitolato: *Sul clima di Assab.*

COMITATO SEGRETO

Venne presentata la domanda di cambio tra i nostri Atti, e la Rivista del Comitato di Artiglieria e Genio, che venne accordata.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, *Presidente.* – Prof. F. Ladelci – P. G. Foglini – P. F. S. Provenzali – P. G. Lais – P. G. S. Ferrari – Prof. V. De Rossi Re – Prof. M. Azzarelli – Prof. G. Tuccimei – Dott. M. Lanzi – Cav. G. Olivieri – Prof. M. S. de Rossi, *Segretario.*

Corrispondenti: Prof. D. I. Galli – Prof. A. De Andreis.

Aggiunti: Marchese L. Fonti.

La seduta apertasi legalmente alle ore 4 p. venne chiusa alle ore 6 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85. Serie IV, Rendiconti. Vol. I. Fasc. 6, 7. Roma, 1885.
2. *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere, ed Arti.* — T. III, Serie VI, disp. 1, 2. Venezia, 1884—85. In 8.°
3. *Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* A. 1884, n.° 1. Moscou, 1884. In–8.°
4. *Bullettino della Reale Accademia Medica di Roma.* — A. X, n.° 9. Roma, 1884. In 8.°
5. *Crónica científica.* — A. VIII, n. 173. Barcelona, 1885. In 8.°
6. *Journal de la société physico–chimique russe.* — T. XVII, n.° 1. S.t Pétersbourg 1885. In 8.°
7. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, serie XII, Vol. IX, quad. 833. Fireuze 1885. In 8.°
8. LANZI (M.) — *Fungi in ditione florae romanae enumerati.* — Roma, 1884. In 4.°
9. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle. Partie littéraire.* — Deuxième série. T. XXI, deuxième livraison. Fevrier. Paris, 1885. In–8.°
10. —— *Partie technique.* — Deuxième série, T. XI, 1re et 2e livraisons. Janvier et Février. Paris 1885. In–8.°
11. RAGONA (D.) — *Sul clima di Assab.* — Modena, 1885. In–8.° piccolo.
12. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — A. 1885, Gennaio. Roma, 1885. In–8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE Vª DEL 19 APRILE 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

VARIAZIONE ORARIA DELLE NUBI
NOTA
DEL P. GIUSEPPE LAIS

Non avvi in Roma chi abbia sottoposto a ricerche statistiche quanto di capriccioso offre l'umidità atmosferica nella conformazione delle nubi, sia nella forma di cumuli, cirri e strati, sia in quella di transizione cirro-strati, cirro-cumuli, strato-cumuli. E poichè in tutto ciò che la natura presenta di capriccioso e variabile vi ha sempre in fondo qualche cosa di immutabile e di definito; così anche nell'indole di quegli intorbidamenti atmosferici che fanno prendere al vapor d'acqua aspetti abbastanza caratteristici, sia nelle ore della comparsa, sia in quelle di maggior frequenza, è da credersi che vi presieda un elemento di regolarità.

Per non entrare in una selva di complicazioni, mettiamo da parte le forme di transizione, e riduciamo a tre i tipi principali delle nubi, *cumuli*, *cirri*, *strati*, richiamandone le definizioni.

Cirri. – Per cirri s'intendono quei filamenti delicati e semitrasparenti che somigliano a barbe di piuma o alla trama di un velo. Piccoli aghi di ghiaccio più volte accertati in ascensioni areostatiche formano in seno a queste nubi straordinarie refrazioni, dette aloni e pareli.

Cumuli sono quelle nubi che offrono la somiglianza con un getto di vapore lanciato da una locomotiva in aria allo stato di calma. Queste sono formate di vapori in candidi ammassi e prendono il nome di nembi, se fosche, o risolventisi in pioggia.

Strati sono quelle piccole nubi allungate che si veggono di fianco in prossimità dell' orizzonte. Spesse volte presentano l'aspetto di cirrostrati o cirrocumuli, quando le masse sono attenuate all'estremità o tondeggianti a modo di piccoli fiocchi. Gli strati appartengono alle basse regioni dell'atmosfera chiamate da Howard nebbie del terreno.

Ciò premesso ecco il lavoro statistico che ho voluto condurre a termine; classificare queste nubi per stagioni e per ore.

Trattandosi di un fenomeno un poco complesso, ho procurato semplificarlo, ed in tutti quei casi in cui il cielo è completamente offuscato e coperto, o non lascia decidere quelle specie di nubi è la proponderante per la sovrapposizione di varie stratificazioni, ho escluso dalla mia rassegna quelle osservazioni, limitandomi soltanto alla sola presenza dei vari tipi.

Il vapor d'acqua in seno dell'atmosfera o è importato da burrasche e venti periodici, o è nascente nel luogo stesso della sua produzione; quindi o variabile, o insensibilmente costante. Si concepisce facilmente, che se buon numero di osservazioni per ciascun tipo di nube venga distribuito per ragione di stagioni e di ore, quanto vi ha di variabile si dispone più o meno uniformemente in tutta l'estensione dell'anno e scomparisce, e quanto vi ha di sistematico si accumula visibilmente intorno a nuclei o centri primari o secondari di ore e di stagioni.

Questo è stato il piano eseguito nello spoglio di un decennio di osservazioni, pubblicate nei Bullettini del Collegio Romano dall'anno 1863–1873, che sommano a 5800 e si rappresentarono graficamente nella tavola annessa alla presente nota.

Quelle oservazioni sono il risultato dell'ispezione del cielo in quattro diverse ore del giorno, le 7 del mattino, le 12, le 3, le 9 pom. Le cifre ottenute e segnate nella tavola non danno nulla di assoluto, ma esprimono di relativo per ciascuna forma di nubi la frequenza calcolata in millesime parti sopra tutte le osservazioni dell' anno per le nubi del medesimo tipo.

Cumuli

Questa forma di nubi predomina nel cielo in ragione del calore dell'atmosfera e presenta in tutte le stagioni una fase generale di aumento

nel giorno e decremento nella notte. Nelle tre stagioni, primavera, estate ed autunno ha luogo un massimo al mezzodì assai elevato, che raddoppia il valore delle 7 antim., e si mantiene di poco superiore al valore assunto alle 3 pom. A questo fa eccezione la stagione invernale, in cui il massimo è in ritardo e cade sulle ore 3. Per tutte le stagioni indistintamenie, sia alle 7 del mattino, sia alle 9 della sera, i cumuli presentano quasi uguale frequenza con un minimo relativo alle 9 della sera, perchè quest'ora di osservazione dista maggiormente, che non quella delle 7 del mattino, dalla comparsa del sole sull'orizzonte.

Cirri

Questo tipo di nubi presenta anche esso il carattere generale di aumento nelle calde ore del giorno dal mezzodì alle 3 pom. e di diminuzione nelle ore estreme di osservazione prossime alla notte.

Il massimo però a differenza dei cumuli non è segnato al mezzodì ma giunge 3 ore più tardi e segna forse l'arrivo dei cumuli nelle più alte regioni dell'atmosfera. I valori delle ore estreme sono poco lontane fra loro; il che mostra, che i cirri formatisi una volta nelle alte regioni dell'aria sono un elemento più permanente e che meno di ogni altro risente l'influenza della notte e dell' irraggiamento notturno.

Strati

Queste nubi si comportano diversamente da quello dei cumuli e cirri, in modo da avere i massimi e i minimi di frequenza invertiti. Equiparandole per così dire alla nebbia, si trova una chiave per ispiegare la maggiore loro frequenza al mattino e alla sera, in cui all'infuori della stagione estiva superano il valore del mezzógiorno e delle 3 pom., e scorgesi il raddoppio nelle ore estreme del giorno dell' altezza raggiunta al mezzodì.

Un lavoro più esteso e più profondo non immuterà sostanzialmente queste conclusioni finali.

RECETTORE IDRAULICO ANIMATO DALL'ARIA COMPRESSA

NOTA

DELL'ING. CAV. FILIPPO GUIDI

Il concetto di trasmettere a distanza l'energia meccanica per mezzo dell'aria compressa fece impressione di vera meraviglia nelle menti dei meccanici teorici e pratici per molte e molte ragioni di comodità di semplicità e di sicurezza.

Senza parlare dello stupendo vantaggio di utilizzare a distanza della energia prodotta da un balzo di acqua confinata naturalmente fra gole inaccessibili, ma pur considerando la facilità di trasmettere la forza di una macchina a vapore, in ogni direzione, con piccoli tubi, retti o tortuosi in mille guise, senza rumore alcuno lungo il loro tragitto, senza bisogno di solidi appoggi se non quanto occorreva per sostenerli, e per nulla proporzionali alla energia che trasmettevano; e finalmente l'innocuo passaggio di un mezzo trasmettitore di forza a traverso di ambienti che potevano contenere oggetti delicatissimi, o materie combustibili, mentre questa forza veniva generata da vive combustioni nei focolari delle macchine a vapore: tutti questi vantaggi ben a ragione fecero apprezzare ed abbracciare con entusiasmo il sistema di trasmissione di energia meccanica con l'aria compressa.

Ma quando si cercò di utilizzare di tal mezzo per animare meccanismi recettori di forte potere, s'incontrarono varie difficoltà più o meno gravi, simili se si vuole a quelle che si ebbero a vincere nei meccanismi animati dal vapor d'acqua a forte elatere, specialmente per gli organi distributori: ma grave oltremodo fu la difficoltà nascente dalla formazione dei cristalli di ghiaccio nei quali si convertiva il vapor d'acqua che seco trasportava l'aria compressa, pel repentino abbassamento di temperatura, entro i cilindri del meccanismo motore: tanto che si dovette ricorrere a sistemi complicati e dispendiosi di riscaldamento, ovvero a rinunciare all'utile della espansione entro i cilindri con perdita gravissima nel rendimento di forza trasmessa.

Per ovviare adunque a tutti gli esposti inconvenienti io propongo un mezzo mercè il quale può divenire la strasmissione con aria compressa talmente semplice che non siavi neppur bisogno di un operajo meccanico alla direzione del meccanismo recettore, e tal mezzo consiste nell'adoperare l'acqua come intermediario per trasmettere l'energia dello elatere dell'aria

sopra un recettore idraulico qual sarebbe una turbina, una macchina a colonna d'acqua, insomma un recettore idraulico qualunque, che lavori ad urto pressione o reazione.

Sieno difatti A ed A' due recipienti uguali sottoposti alle stesse condizioni e dotati dei stessi meccanismi che ora schematicamente passo a descrivere.

Il recipiente A è ripieno d'acqua che gli fu data dal serbatojo S a mezzo del tubo T, al termine del quale è una valvola V. L'aria compressa condotta dal tubo *tt* agisce sopra l'acqua contenuta nel recipiente A, e quindi quest'acqua trovando aperta la valvola *v* e chiusa la *v'* esce con violenza e reagisce sul recettore idraulico sottoposto R producendo una forza viva quale sarebbe prodotta dalla stessa acqua se nei modi comuni pei recettori idraulici provvenisse da una altezza pari a quella di una colonna equivalente alla pressione di tante atmosfere a quante effettivamente giunge compressa l'aria entro il recipiente A.

Vuotandosi il recipiente A il galleggiante G scende sino al fondo e per mezzo di uno dei congegni conosciutissimi (di cui faccio il disegno in figura schematica e tralascio la descrizione per tema di tediare senza utile veruno) s'intercetta l'entrata all'aria compressa e se ne apre invece l'uscita ai tubi *t't'* di guisa che (nel modo che dirò in seguito) il recipiente A trovandosi alla pressione ordinaria della atmosfera lascia aprirsi la valvola V e quindi si riempie lo stesso recipiente di acqua che nuovamente vi fluisce pel tubo T del serbatoio S. Nel frattempo che il recipiente A si riempie d'acqua come ho detto e che per conseguenza resta inoperoso per l'azione sopra il recettore idraulico, agisce invece il secondo recipiente A' nell' identico modo come agì il primo, chiusa naturalmente la valvola *v* ed aperta la *v'* e così alternativamente agiscono i due recipienti AA' mantenendo costante il deflusso dell' acqua che agisce sul recettore idraulico R.

Resta a vedere ciò che di sopra accennava e cioè come regolarmente accada l'uscita dell'aria compressa dai recipienti dopo compita l'azione sull'acqua, e dippiù come sia utilizzato ancora l'elatere dell' aria stessa. Ho detto che il galleggiante G chiude l'entrata ed apre l'uscita all'aria compressa. Or bene per mezzo dei tubi *t' t'* l'aria ch'esce alla pressione di n atmosfere va a mantenere piena ad $\frac{n}{2}$ atmosfere il recipiente B: ed appena nei recipienti AA' sia scemata la pressione sino ad $\frac{n}{2}$ atmosfere. si

aprono le valvole v'' v'' e l'aria s'equilibra con l'atmosfera per far succedere il riempimento d'acqua come dissi. Finalmente l'aria compressa ad $\frac{n}{2}$ atmosfere nel recipiente B serve a mezzo di un'apparato simile $A''' A^{iv}$ alla coppia di recipienti $A'A''$ ma più semplice a sollevare l'acqua, che uscì dal recettore idraulico, dal serbatojo S' al serbatoio S in modo che l'acqua torni sempre a servire come intermediario fra l'aria compressa ed il motore idraulico senza che si consumi se non per quella minima parte che fugge per evaporazione.

Da quanto ho esposto mi sembra evidente la semplicita dell'apparecchio che propongo, e l'avere eliminate completamente le difficoltà che arrecano tanta noja e tanto dispendio nelle comuni macchine ad aria compressa,

Credo utile far avvertire come sia ben facile variare la disposizione del galleggiante G e dei membri di collegamento con le valvole t' t' d'immissione e di uscita dell'aria compressa, in guisa che la prima chiudasi innanzi della seconda di quel tanto tempo quanto si vuole per ottenerne quindi la minore o maggiore espansione dell'aria compressa entro i recidienti A A'. L'aria trasmessa a mò d'esempio alla pressione di dieci atmosfere può subire l'espansione anche sino a due poichè la metà di tale pressione è ancora sovrabbondante per l'innalzamento continuo dell' acqua dal serbatoio S'' al serbatoio S.

I cristalli di ghiaccio che si formeranno entro i recipienti AA' saranuo immediatamente disciolti dalla massa d'acqua che continuamente rinnovasi. Sarà necessario un ben adequato volante come lo è indispensabile nelle macchine a vapore che lavorano a forti espansioni, e senza dubbio il recettore idraulico più adatto in questi casi non è che la macchina a colonna d'acqua poichè il variare periodico della velocità dell'acqua rispetto alla velocità relativa delle palette di una turbina ne scemerebbe di molto il rendimento; questo genere di recettori sarà utilissimo nel caso in cui per abbondanza di potere nella forza idraulica da cui viene compressa l'aria, non interessi utilizzarne l'espansione.

Concludo che col mezzo da me proposto, i vantaggi della trasmissione di forza ad aria compressa non saranno più dimidiati nei recettori di tale trasmissione; ma al contrario si avrà

1.° Rendimento uguale a quello delle migliori macchine conosciute ad aria compressa senza le tante complicazioni degli organi di distribuzione e dei mezzi di riscaldamento, ad eccezione soltanto di quella frazione di elatere che occorre per dare all' acqua il turno fra i serbatoi inferiore o superiore: sebbene sia d'avvertire che questa frazione di residuo elatere non forma contro pressione come accade nei cilindri delle macchine in uso: pratticamente poi si troverà grande vantaggio nella impossibilità delle fughe, anche a fortissima pressione, mentre nei pistoni se ne hanno tanto facilmente.

2.° Economia grandissima nella costruzione, nella manutenzione e nella direzione dell'apparecchio.

ÉTUDE SUR QUELQUES FORMULES D'ANALYSE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR LE P. TH.LE PEPIN, S. J.

1. Liouville a donné dans la deuxième série de son Journal une suite de formules générales d'où l'on peut déduire un grand nombre de résultats importants pour la théorie des nombres. On peut trouver l'origine de ces formules dans la démonstration que Dirichlet a donnée du théorème de Jacobi, relatif à la décomposition du quadruple d'un nombre impair en une somme de quatre carrés impairs. Dirichlet lui-même annonce à la fin de sa démonstration qu'il a été conduit par sa méthode à des formules plus générales. Cette indication était plus que suffisante pour inspirer à Liouville le désir de découvrir lui-même ces formules ou d'autres semblables.

On peut même rapporter à Euler le premier germe de ces formules. Dans ses « *Considérations sur le théorème de Fermat relatif aux nom-* » *bres polygonaux* (Opuscula analytica, t. 2) » Euler indique l'usage que l'on pourrait faire de la série

$$P = 1 + x + x^4 + x^9 + \ldots = \sum_0^\infty x^{n^2}$$

pour démontrer que tout nombre entier est la somme de quatre carrés. Il s'agit, dit-il, de démontrer que dans le développement de la quatrième puissance de cette série, savoir

$$P^4 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m + \ldots,$$

aucun coefficient ne se réduit à zéro. Jacobi a obtenu mieux que cela au moyen de la série

$$\theta_1(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2},$$

où l'on donne à n toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$; il a trouvé que le coefficient de q^m, dans le développement de la quatrième puissance de cette série, est égal à huit fois la somme des diviseurs de m, si m est impair, et à vingt-quatre fois la somme des diviseurs impairs de m, si m est pair. Or le coefficient de q^m dans ce développement est égal au nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$

en nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls, deux solutions étant considérées comme distinctes, lorsqu'elles diffèrent entre elles, soit par les valeurs des carrés, soit par leur ordre, soit par les signes des racines. Le résultat obtenu par Jacobi peut donc s'énoncer de la manière suivante :

I. *Le nombre des représentations d'un nombre impair* m *par la somme de quatre carrés à racines positives, négatives ou nulles, est égal à huit fois la somme des diviseurs de* m.

II. *Le nombres des représentations d'un nombre pair* m *par la somme de quatre carrés à racines positives, négatives ou nulles, est égal à vingt-quatre fois la somme des diviseurs impairs de* m.

2. Jacobi n'a obtenu ces théorèmes que par la théorie des fonctions elliptiques. Mais il a démontré dans le Journal de Crelle (t. 12, p. 167), par des considérations arithmétiques, un théorème analogue, relatif à la décomposition du quadruple d'un nombre impair m en une somme de quatre carrés impairs. C'est à cette démonstration, simplifiée par Dirichlet, qu'il faut faire remonter l'origine des formules générales de Liouville, que nous devons étudier dans le présent Mémoire.

Nous commencerons par exposer la démonstration de Dirichlet, en apportant quelques modifications nécessaires pour faire bien saisir de quelle manière elle conduit aux formules plus générales que nous obtiendrons ensuite. Puis, afin de montrer l'utilité de ces formules, nous en ferons quelques applications relatives à diverses formes quadratiques quaternaires.

Ch. I. *Décomposition du quadruple d'un nombre impair en une somme de quatre carrés impairs.*

3. Soit m un nombre impair dont le quadruple $4m$ est décomposé de toutes les manières possibles en une somme de quatre carrés impairs. La somme des deux premiers carrés est le double d'un nombre impair, ainsi que la somme des deux derniers. Nous pouvons grouper ensemble toutes les solutions dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale au double d'un même nombre impair m'; dans toutes ces décompositions la somme des deux derniers carrés est égale au double d'un même nombre impair m'', déterminé par la formule $2m'' = 4m - 2m'$. Toutes ces décompositions correspondent ainsi à une même solution de l'équation

$$(1) \qquad 2m = m' + m''$$

en nombres impairs et positifs m', m''.

Inversement, lorsqu'on partage le nombre $2m$ en deux nombres impairs m', m'', que l'on décompose de toutes les manières possibles en deux carrés impairs chacun des deux nombres $2m'$, $2m''$ et que l'on combine chaque décomposition de $2m'$ avec chacune des décompositions de $2m''$, on obtient toutes les décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs qui correspondent à une même solution de l'équation (1). En faisant la même chose pour toutes les solutions de l'équation (1) en nombres impairs et positifs m', m'', on obtient évidemment toutes les décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs.

4. Proposons-nous de trouver le nombre de ces décompositions. Pour cela nous chercherons d'abord une expression analytique du nombre de celles qui correspondent à une même solution m', m'' de l'équation (1). Ce nombre est égal au produit du nombre des décompositions de $2m'$ en deux carrés, multiplié par le nombre des décompositions semblables de $2m''$. Or, si nous décomposons de toutes les manières possibles m', m'' en deux facteurs, en posant

$$(2) \qquad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta,$$

les nombres des décompositions de $2m'$ et de $2m''$ en deux carrés sont exprimés respectivement par les deux formules

$$\rho\,(m') = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \quad \rho\,(m'') = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}}$$

dans lesquelles les éléments des sommes désignées par $\sum$ correspondent à tous les diviseurs de m', désignés indéfiniment par a, et à tous les diviseurs de m'', désignés par b. En effet Jacobi a trouvé par la considération des séries elliptiques que le nombre des décompositions du double d'un nombre impair m' en une somme de deux carrés est égal à l'excès du nombre des diviseurs de m' compris dans la forme $4l+1$ sur le nombre de ceux qui sont de la forme $4l+3$. Or cet excès est exprimé par la formule

$$\rho\,(m') = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}},$$

dans laquelle la somme s'étend à tous les diviseurs de m' désignés indéfiniment par a. Du reste, on établit directement par la théorie des formes quadratiques que le nombre des décompositions du double d'un nombre impair en la somme de deux carrés est exprimé par la dernière formule.

En multipliant l'un par l'autre les deux nombres $\rho(m')$, $\rho(m'')$ on obtient le nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs, dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale à un même nombre $2m'$. Par conséquent le nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs qui correspondent à une même solution de l'équation (1) est exprimé par le produit

$$\rho(m')\,\rho(m'') = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}} \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} = \sum\sum (-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

On obtient donc le nombre de toutes les décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs, en faisant la somme de tous les produits semblables, relativement aux diverses solutions de l'équation (1) en nombres impairs et positifs m', m''. Si l'on désigne ce nombre par N, on a

$$N = \sum \rho(m')\,\rho(m'') = \sum \left(\sum\sum (-1)^{\frac{a-b}{2}}\right).$$

Dans cette formule, les deux sommations indiquées entre parenthèse correspondent aux diverses solutions des deux équations $m' = a\alpha$, $m'' = b\beta$. Le premier signe sommatoire se rapporte aux diverses partitions de $2m$ en deux nombres impairs et positifs m', m''; il indique que l'on doit faire successivement, pour chacune de ces partitions, les deux sommations indiquées entre parenthèse, puis ajouter les résultats ainsi obtenus. On peut aussi remplacer les trois signes sommatoires par un seul se rapportant aux solutions de l'équation

$$(3) \qquad 2m = a\alpha + b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β. Le nombre cherché N est alors exprimé par la formule

$$(4) \qquad N = \sum (-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

5. Comme la somme qui forme le second membre de la formule (4) renferme un grand nombre de termes égaux et de signes contraires, elle peut être simplifiée par la suppression des termes qui se détruisent ainsi deux à deux. Evaluons d'abord les termes qui correspondent à l'hypothèse $a = b$. Tous ces termes étant égaux à 1, leur somme est égale à leur nombre qui est celui des solutions de l'équation

$$(3') \qquad 2m = a(\alpha + \beta)$$

en nombres impairs et positifs, a, α, β.

Il est évident que le nombre a doit diviser m. Soit donc $m = d\delta$ et $a = d$. L'équation précédente devient

$$2\delta = \alpha + \beta.$$

On peut donner à α les δ valeurs impaires $1, 3, 5, \ldots 2\delta - 1$, et pour chacune de ces valeurs le nombre β est déterminé par la formule $\beta = 2\delta - \alpha$. Le nombre des solutions de l'équation (3'), qui correspondent à un même diviseur δ de m est égal à ce diviseur; le nombre de toutes les solutions est égal à la somme des diviseurs de m. D'après Liouville nous désignons cette somme par $\zeta_1(m)$. Ce nombre $\zeta_1(m)$ exprime aussi la somme des termes du second membre de l'équation (4) qui correspondent à l'hypothèse $a = b$. On a donc

$$(5) \qquad N = \zeta_1(m) + \sum\nolimits_1 (-1)^{\frac{a-b}{2}},$$

en désignant par $\sum_1$ une somme restreinte, dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (3) dans lesquelles les deux nombres a et b sont inégaux.

Or cette dernière somme est le double de celle qui correspond aux solutions dans lesquelles on a $a > b$. En effet, groupons ensemble les deux termes qui correspondent à deux solutions a, b, α, β et a', b', α', β' liées entre elles par les formules

$$(A) \qquad a' = b, \; b' = a, \; \alpha' = \beta, \; \beta' = \alpha.$$

Ces deux termes sont

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} \text{ et } (-1)^{\frac{a'-b'}{2}} = (-1)^{\frac{b-a}{2}}.$$

Comme ces deux termes sont égaux, nous pouvons remplacer leur somme par le double de celui qui vérifie la condition $a - b > 0$, ce qui a lieu nécessairement pour l'un d'eux, puisque $a' - b' = -(a - b)$. D'ailleurs il est évident que toutes les solutions de l'équation (3) peuvent être groupées deux à deux au moyen des formules (A), tant que les deux nombres a et b sont inégaux. L'équation (5) peut donc être remplacée par la suivante

$$(6) \qquad N = \zeta_1(m) + 2\sum{}' (-1)^{\frac{a-b}{2}},$$

dans laquelle on désigne par $\sum'$ une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (3) qui vérifient la condition $a > b$.

6. Or les termes de cette somme peuvent être groupés deux à deux de telle manière que la somme des deux termes de chaque groupe soit nulle. En effet, l'équation (3) peut s'écrire

$$(7) \qquad 2m = (a-b)\,\alpha + (\alpha+\beta)\,b,$$

et sous cette forme, on voit que l'un des deux nombres $\frac{a-b}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ est pair et l'autre impair. Si donc la solution a, b, α, β est associée à une autre solution a', b', α', β' au moyen des relations

$$(\mathrm{B}) \qquad a'-b' = \alpha+\beta, \quad \alpha'+\beta' = a-b,$$

les deux termes de notre somme $\sum'$ qui correspondent à ces deux solutions, sont égaux et de signes contraires, de sorte que leur somme s'évanouit. D'ailleurs si l'on fait la substitution (B) dans la formule

$$2m = a'\alpha' + b'\beta' = (\alpha'+\beta')\,b' + (a'-b')\,\alpha',$$

on trouve

$$2m = (a-b)\,b' + (\alpha+\beta)\,\alpha',$$

et en comparant cette formule avec l'équation (7), on voit qu'elle est vérifiée lorsqu'on prend

$$b' = \alpha + \theta\,(\alpha+\beta), \quad \alpha' = b - \theta\,(a-b).$$

La combinaison de ces dernières formules avec les relations (B) donne

$$\text{I.} \quad \left|\begin{array}{ll} \alpha' = b - \theta\,(a-b), & \beta' = (\theta+1)\,(a-b) - b \\ a' = \alpha + (\theta+1)\,(\alpha+\beta), & b' = \alpha + \theta\,(\alpha+\beta). \end{array}\right.$$

Quelle que soit la valeur entière de θ, ces formules donnent pour a', b', α', β' des valeurs impaires qui vérifient l'équation $a'\alpha' + b'\beta' = a\alpha + b\beta$; mais pour que les valeurs de α' et de β' soient positives, il est nécessaire que le nombre θ vérifie les deux inégalités

$$(8) \qquad \theta < \frac{b}{a-b} < \theta + 1.$$

Cette condition détermine complètement le nombre θ. Car le nombre $(a-b)$ étant pair, tandis que b est impair, le quotient $b:(a-b)$ ne peut pas se réduire à un nombre entier et la partie entière de ce quotient est la seule

valeur de θ qui vérifie les inégalités (8). Ainsi à toute solution de l'équation (3) dans laquelle a est $> b$, les formules I font correspondre une solution unique a', b', α', β' de la même équation, vérifiant la condition $a' - b' > 0$. De plus, lorsqu'on prend successivement toutes les solutions de l'équation (3) qui vérifient la condition $a - b > 0$, les formules I donnent pour a', b', α', β' des solutions toutes différentes; car si l'on résout les formules I par rapport aux nombres a, b, α, β, on trouve :

$$\text{II.} \quad \left| \begin{array}{ll} a = \alpha' + (\theta + 1)(\alpha' + \beta'), & b = \alpha' + \theta(\alpha' + \beta') \\ \alpha = b' - \theta(a' - b'), & \beta' = (\theta + 1)(a' - b') - b'. \end{array} \right.$$

Dans ces formules, la valeur de θ est complètement déterminée par la double inégalité $\alpha > 0$, $\beta > 0$, d'où l'on déduit

$$\theta < \frac{b'}{a' - b'} < \theta + 1.$$

Par conséquent une seule solution a, b, α, β peut correspondre dans les formules I à une solution déterminée a', b', α', β'. Il résulte de là que toutes les solutions de l'équation (3) dans lesquelles la différence $a - b$ est positive, sont groupées deux à deux par les formules I, de telle manière que la même solution ne peut pas figurer dans deux groupes différents. Or les deux termes de $\sum'$ qui correspondent aux deux solutions de chacun de ces groupes sont égaux et de signes contraires ; car les deux nombres $\frac{a-b}{2}$ et $\frac{a'-b'}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ étant, l'un pair et l'autre impair, la somme

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} + (-1)^{\frac{a'-b'}{2}}$$

se réduit à zéro. La somme $\sum' (-1)^{\frac{a-b}{2}}$ qui figure dans l'équation (6) est donc composée de termes qui se détruisent deux à deux ; elle s'évanouit et l'on a simplement

$$(9) \qquad N = \xi_1(m) :$$

Le nombre des décompositions du quadruple d'un nombre impair m *en quatre carrés impairs, est égal à la somme des diviseurs de* m.

Soit par exemple $m = 3$. Dans toute décomposition du nombre 12 en une somme de quatre carrés impairs, l'un des carrés est 9 et les trois autres sont égaux à 1 ; mais le carré 9 peut occuper quatre positions, de sorte

que le nombre des décompositions de 12 en quatre carrés impairs est égal à 4, comme on le déduit du théorème énoncé.

Ch. II. *Formules générales qui se déduisent de l'analyse précédente.*

7. Nous venons de démontrer que la somme

$$\sum (-1)^{\frac{a-b}{2}}$$

relative à toutes les solutions de l'équation

$$(3) \qquad 2m = a\alpha + b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β, se réduit à la somme des termes qui correspondent à l'hypothèse $a = b$. Or cette démonstration repose uniquement sur cette propriété de la fonction $(-1)^{\frac{a-b}{2}}$ de ne pas changer de valeur quand $(a-b)$ change de signe, et de changer de signe sans changer de valeur numérique lorsqu'on remplace $a-b$ par $\alpha+\beta$. Si donc on substitue à cette fonction toute autre fonction de $a-b$ et de $\alpha+\beta$ jouissant de la même propriété, on démontrera de la même manière que la somme des valeurs de cette fonction relatives aux diverses solutions de l'équation (3) se réduit à la somme de celles qui correspondent aux solutions dans lesquelles les deux nombres a et b sont égaux.

Soit donc $\varphi(x,y)$ une fonction quelconque de x et de y, qui, pour toutes les valeurs entières de x et de y employées dans nos formules, vérifie les conditions

$$(\text{K}) \qquad \varphi(x,y) = \varphi(-x,y) = \varphi(x,-y), \; \varphi(x,y) = -\varphi(y,x).$$

au moyen de cette fonction nous formons la somme

$$\sum \varphi(a-b, \alpha+\beta),$$

dont les éléments correspondent un à un aux diverses solutions de l'équation (3) en nombres impairs et positifs. Nous pouvons partager cette somme en deux parties, dont l'une correspond aux solutions dans lesquelles a est égal à b, et l'autre, aux autres solutions.

Soit d'abord $a=b$. La valeur commune des deux nombres a et b étant

un diviseur de b, nous posons $a = b = d$ et $m = d\delta$, de sorte que l'équation (3) divisée par d donne

$$(4) \qquad 2\delta = \alpha + \beta.$$

Les valeurs correspondantes de $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$ sont toutes égales à $\varphi(0, 2\delta)$ et leur nombre est égal à celui des solutions de l'équation (4), c'est-à-dire à δ, puisque l'on peut donner à α les δ valeurs impaires, inférieures à 2δ. La somme des termes qui correspondent à un même diviseur δ de m est donc $\delta\varphi(0, 2\delta)$. Si l'on égale successivement δ à tous les diviseurs de m et qu'on ajoute ensemble les valeurs correspondantes du produit $\delta\varphi(0, 2\delta)$, on obtient la première partie de la somme considérée, savoir celle qui correspond à l'hypothèse $a = b$. On a de cette manière

$$\sum \varphi(a - b, \alpha + \beta) = \sum \delta\varphi(0, 2\delta) + \sum\nolimits_1 \varphi(a - b, \alpha + \beta).$$

La première somme du second membre correspond à tous les diviseurs de m, désignés indéfiniment par δ. La deuxième somme, $\sum_1$, se rapporte aux solutions de l'équation (3) dans lesquelles a et b sont deux nombres inégaux. Nous allons démontrer qu'en vertu des conditions (k) cette dernière somme est nulle.

8. Réunissons d'abord les deux termes qui correspondent aux deux solutions (a, b, α, β), $(a', b', \alpha', \beta')$ liées entre elles par les formules

$$(\text{A}) \qquad a' = b, \; b' = a, \; \alpha' = \beta, \; \beta' = \alpha.$$

Comme l'on a $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ et $a' - b' = -(a - b)$ les deux termes

$$\varphi(a - b, \alpha + \beta) \text{ et } \varphi(a' - b', \alpha' + \beta')$$

sont égaux et leur somme peut être représentée par le double de celui qui correspond à une valeur positive de $(a - b)$, condition qui est nécessairement vérifiée pour l'un d'eux, puisque les deux différences $a - b$, $a' - b'$ sont égales et de signes contraires. On a donc

$$\sum\nolimits_1 \varphi(a - b, \alpha + \beta) = 2\sum\nolimits_2 \varphi(a - b, \alpha + \beta)$$

en désignant par $\sum_2$ une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (3) qui vérifient la condition $a > b$.

Or, nous avons demontré (n.° 6) que toutes ces solutions sont groupées deux à deux, au moyen des formules I et II, de telle sorte que la même

solution ne figure pas dans deux groupes différents, et que le deux solutions du même groupe vérifient les relations

$$\text{(B)} \qquad a' - b' = \alpha + \beta, \quad \alpha' + \beta' = a - b.$$

Les termes de $\sum_2$ qui correspondent aux deux solutions d'un même groupe ont donc pour somme

$$\varphi(a' - b', \alpha' + \beta') + \varphi(a - b, \alpha + \beta) = \varphi(\alpha + \beta, a - b) + \varphi(a - b, \alpha + \beta),$$

et cette somme se réduit à zéro, puisque la fonction φ vérifie la condition $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$. Ainsi la somme désignée par $\sum_2$ peut se partager en sommes partielles, formées chacune de deux termes égaux et de signes contraires. Par conséquent elle se réduit à zéro. On a donc simplement

$$(\Omega) \qquad \sum \varphi(a - b, \alpha + \beta) = \sum \delta\varphi(0, 2\delta) = \sum d\varphi(0, 2d).$$

Dans le premier membre de cette formule, le signe $\sum$ indique une somme dont les termes $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$ correspondent aux diverses solutions de l'équation

$$(3) \qquad 2m = a\alpha + b\beta$$

en nombres impairs et positifs. Notre formule exprime que cette somme est égale à la somme des valeurs que prend le produit $\delta\varphi(0, 2\delta)$ lorsqu'on prend successivement comme valeurs de δ tous les diviseurs du nombre impair m.

9. On peut démontrer de la même manière une formule plus générale se rapportant à l'équation

$$(5) \qquad 2^{\lambda+1} m = a\alpha + b\beta,$$

dans laquelle λ désigne un exposant entier, positif ou nul, m, un nombre impair donné, a, b, α, β, des nombres impairs et positifs, propres à vérifier l'équation. Dans la somme $\sum \varphi(a - b, \alpha + \beta)$, dont les termes correspondent aux diverses solutions de l'équation (5), la partie qui correspond aux solutions dans lesquelles les deux nombres a et b sont inégaux s'évanouit. D'abord cette partie est égalle à deux fois celle qui correspond aux solutions dans lesquelles a est $> b$. Or les termes de cette dernière somme sont groupés deux à deux au moyen des formules I et II, de telle sorte que le même terme ne figure pas dans deux groupes différents. Comme en vertu de la condition

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$$

la somme de deux termes de chaque groupe

$$\varphi(a' - b', \alpha' + \beta') + \varphi(a - b, \alpha + \beta)$$

se réduit à zéro, puisque l'on a

$$\varphi(a' - b', \alpha' + \beta') = \varphi(a + \beta, a - b) = -\varphi(a - b, \alpha + \beta),$$

la partie considérée de la somme totale s'évanouit et il ne reste plus que la partie qui correspond à l'hypothèse $a = b$.

La valeur commune des deux nombres a et b étant un diviseur de m, nous poserons $m = d\delta$ et $a = b = d$. L'équation (5) devient alors

$$(5') \qquad 2^{\lambda+1}\delta = \alpha + \beta.$$

Tous les termes $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$ qui correspondent à cette hypothèse sont égaux à $\varphi(0, 2^{\lambda+1}\delta)$ et leur nombre est égal à celui des solutions de l'équation (5') en nombres impairs α, β. Ce nombre est égal à $2^\lambda\delta$, puisque l'on peut égaler α successivement à tous les nombres impairs

$$1, 3, 5, \ldots 2^{\lambda+1}\delta - 1$$

inférieurs à $2^{\lambda+1}\delta$. La somme des termes qui correspondent à une même décomposition $m = d\delta$ du nombre m en deux facteurs est donc égale au produit

$$2^\lambda\delta \times \varphi(0, 2^{\lambda+1}\delta).$$

La somme de tous les produits semblables que l'on obtient en égalant successivement δ à tous les diviseurs de m exprime donc la somme des valeurs de $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$ qui correspondent aux solutions de l'équation (5) dans lesquelles les deux nombres a et b sont égaux. On a donc

$$(\Omega'). \qquad \sum \varphi(a - b, \alpha + \beta) = 2^\lambda \sum d\,\varphi(0, 2^{\lambda+1} d).$$

10. L'équation (5) peut être remplacée par trois autres équations

$$(1). \qquad 2^{\lambda+1} m = m' + m''$$

$$(2). \qquad m' = a\alpha, \ m'' = b\beta.$$

Cela revient à grouper ensemble toutes les solutions de l'équation (5) dans lesquelles le produit $a\alpha$ présente une même valeur m'. Par conséquent le premier membre de la formule (Ω') peut être remplacé par une somme triple, dont l'une se rapporte aux diverses solutions de l'équation (1) en

nombres impairs et positifs m', m'', et les deux autres, à toutes les décompositions des deux nombres m', m'' en deux facteurs.

Notre formule peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$(Z) \qquad \sum \left(\sum\sum \varphi\,(a-b,\ \alpha+\beta)\right) = 2^{\lambda} \sum d\ \varphi\,(0,\ 2^{\lambda+1}\,d).$$

Le premier signe d'intégration, $\sum$ se rapporte aux diverses solutions de l'équation (1), c'est-à-dire aux diverses partitions du nombre $2^{\lambda+1}\,m$ en deux parties impaires et positives m', m''. Pour chacune de ces solutions, les deux signes $\sum\sum$ renfermés entre parenthèse indiquent une intégration relative à tous les systèmes de valeurs des nombres a, b, α, β propres à vérifier les équations (2). La somme de tous les résultats semblables, relatifs aux valeurs $1, 3, 5, \ldots\ 2^{\lambda+1}\,m-1$ de m', forme le premier membre de notre formule. Nous verrons dans les applications combien est utile la substitution de la somme triple à la somme simple, lorsque la fonction $\varphi\,(x, y)$ est choisie de manière à rendre indépendantes l'une de l'autre les deux intégrations relatives aux deux équations $m' = a\alpha$, $m'' = b\beta$.

La somme indiquée dans le second membre se rapporte à l'équation $m = d\delta$. Pour chaque diviseur de m on forme le produit $d\varphi\,(0,\ 2^{\lambda+1}\,d)$ et l'on réunit en une seule somme tous les produits semblables, qui correspondent à tous les diviseurs de m indéfiniment désignés par d.

11. On satisfait aux conditions (K) en prenant

$$\varphi\,(x, y) = f\,(x, y) - f\,(y, x),$$

pourvu que la fonction $f\,(x, y)$ soit une fonction paire de x et de y, pour toutes les valeurs de ces variables employées dans nos formules. En faisant cette substitution dans l'équation (Z) on trouve

$$(b). \quad \sum\left[\sum\sum(f\,(a-b,\ \alpha+\beta) - f\,(\alpha+\beta,\ a-b))\right] = 2^{\lambda} \sum d\ (f\,(0,\ 2^{\lambda+1}\,d) - f\,(2^{\lambda+1}\,d, 0)).$$

Comme les équations (2) ne changent pas lorsqu'on échange entre elles les lettres latines et les lettres grecques correspondantes, on a

$$\sum\sum\sum f\,(\alpha+\beta,\ a-b) = \sum\sum\sum f\,(a+b,\ \alpha-\beta).$$

En faisant cette substitution dans l'équation (b), on trouve

$$(c) \quad \sum\left[\sum\sum\ (f\,(a-b,\ \alpha+\beta) - f\,(a+b,\ \alpha-\beta))\right] = 2^{\lambda} \sum d\ (f\,(0,\ 2^{\lambda+1}\,d) - f\,(2^{\lambda+1}\,d, 0)).$$

On vérifie encore les deux conditions

$$\text{(K)} \qquad \varphi(x, y) = -\varphi(y, x), \quad \varphi(-x, y) = \varphi(x, -y) = \varphi(x, y),$$

lorsqu'on prend

$$\varphi(x, y) = f(x) - f(y),$$

pourvu que la fonction $f(x)$ vérifie, pour toutes les valeurs de x employées dans nos formules, la condition

$$f(-x) = f(x).$$

La formule (Z) devient alors :

$$(a) \qquad \sum [\sum\sum (f(a-b) - f(a+b)] = 2^\lambda \sum d \, [f(0) - f(2^{\lambda+1} d)].$$

L'hypothèse $\lambda = 0$ réduit les formules (a), (b), (c) aux trois suivantes :

$$\text{(A)} \quad \sum [\sum\sum (f(a-b) - f(a+b))] = \sum d \, (f(0) - f(2d)),$$

$$\text{(B)} \quad \sum [\sum\sum (f(a-b, \alpha+\beta) - f(\alpha+\beta, a-b))] = \sum d \, (f(0, 2d) - f(2d, 0)),$$

$$\text{(C)} \quad \sum [\sum\sum (f(a-b, \alpha+\beta) - f(a+b, \alpha-\beta)] = \sum d \, (f(0, 2d) - f(2d, 0)).$$

La triple somme qui forme le premier membre de ces formules se rapporte aux diverses solutions des trois équations

$$2m = m' + m'', \quad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta,$$

auxquelles se réduisent les équations (1) et (2) lorsqu'on y fait $\lambda = 0$.

Les six formules énoncées dans ce n° coïncident, aux notations près, avec les formules générales désignées par les mêmes lettres dans les deux premiers articles de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 2^e^ série, t. III, p. 143 et 193).

Ch. III. *Formules relatives à l'équation*

$$2^\lambda . m = 2^\mu a\alpha + 2^\nu b\beta.$$

12. Nous désignons par m un nombre impair et positif et par λ un exposant entier, positif ou nul. Nous décomposons le nombre $2^\lambda m$ de toutes les manières possibles en deux parties entières et positives, paires ou impaires, p, q, puis nous cherchons toutes les solutions possibles des trois équations

$$2^\lambda . m = p + q, \quad p = \mathrm{A}a, \quad q = \mathrm{B}b$$

en nombres entiers et positifs p, q, A, B, a, b dont les deux derniers a et b sont impairs. Au moyen de ces solutions et d'une fonction $f(x, y)$ qui, pour toutes les valeurs de x et de y employées dans nos formules, vérifie les conditions

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y),$$

nous formons la somme triple

$$\sum (\sum\sum [f(A - B,\ a + b) - f(A + B,\ a - b)])$$

où les deux premières sommations indiquées entre parenthèse se rapportent, pour une même solution de l'équation

$$2^\lambda . m = p + q,$$

à toutes les décompositions possibles de chacun des deux nombres p, q en deux facteurs, l'un impair et l'autre, pair ou impair. Quant à la troisième intégration, elle se rapporte aux différents systèmes de valeurs positives des deux nombres p et q propres à vérifier l'équation $2^\lambda m = p + q$.

Pour démontrer la formule que nous voulons établir, il est préférable de remplacer les trois signes sommatoires par un seul, se rapportant aux diverses solutions de l'équation

$$(1) \qquad 2^\lambda . m = Aa + Bb$$

en nombres entiers et positifs A, B, a, b dont les deux derniers sont impairs. Nous pouvons aussi séparer les deux parties de la somme et écrire

$$(2) \qquad \sum (f(A - B,\ a + b) - f(A + B,\ a - b)) = S' - S$$

$$S' = \sum f(A' - B',\ a' + b'), \quad S = \sum f(A + B, a - b).$$

De plus nous distinguons les éléments de la somme S' en les faisant correspondre aux diverses solutions de l'équation

$$(1') \qquad 2^\lambda m = A'a' + B'b',$$

comme ceux de la somme S correspondent aux solutions de l'équation équivalente (1).

13. Nous transformerons d'abord la somme S en distinguant les termes qui correspondent aux solutions dans lesquelles a et b sont égaux. Comme la valeur commune de ces deux nombres est un diviseur de m, nous la désignerons par δ et nous poserons $m = d\delta$. Les termes correspondants de

la somme S sont tous égaux à $f(2^\lambda d, 0)$ et leur nombre est égal à celui des solutions de l'équation

$$(3). \qquad 2^\lambda d = A + B,$$

c'est-à-dire à $2^\lambda d - 1$, puisque le nombre A peut recevoir toutes les valeurs entières et positives, inférieures à $2^\lambda d$. La somme de tous les termes de S qui correspondent à l'hypothèse $a = b = \delta$ est donc égale au produit

$$(2^\lambda d - 1)\, f(2^\lambda d, 0),$$

et la somme de tous les produits semblables qu'on obtient en égalant d successivement à tous les diviseurs de m, exprime la somme des termes de S qui correspondent aux solutions de l'équation (1) dans lesquelles la différence $(a - b)$ s'évanouit.

Quant aux autres termes de S, nous les grouperons deux à deux au moyen des formules

$$A_1 = B,\ B_1 = A,\ a_1 = b,\ b_1 = a.$$

Les deux termes de chaque groupe sont égaux, puisque l'on a

$$A_1 + B_1 = A + B \ \text{ et } \ a_1 - b_1 = -(a - b).$$

Nous remplacerons leur somme par le double de celui des deux termes qui correspond à l'hypothèse $a - b > 0$, ce qui a nécessairement lieu pour l'un d'eux, puisque les deux différences $a_1 - b_1$, $a - b$ sont de signes contraires. On a donc

$$(4) \qquad S = \sum (2^\lambda d - 1)\, f(2^\lambda d, 0) + 2\sum\nolimits_1 f(A + B,\ a - b),$$

en représentant par $\sum_1$ une somme restreinte dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (1) qui vérifient la condition $a > b$.

14. Nous ferons subir une transformation semblable à la somme S'. Nous grouperons deux à deux les termes dans lesquels A', B' sont inégaux, au moyen des formules

$$A_1 = B',\ B_1 = A',\ a_1 = b',\ b_1 = a'.$$

Les deux termes de chaque groupe sont égaux, puisque l'on a

$$A_1 - B_1 = -(A' - B'), \quad a_1 + b_1 = a' + b'.$$

De plus dans l'un des deux termes la différence $A' - B'$ est positive,

puisque les deux différences $A_1 - B_1$, $A' - B'$ sont de signes contraires. Nous remplacerons la somme des deux termes de chaque groupe par le double de celui qui vérifie la condition $A' > B'$.

Les autres termes de S' correspondent à l'hypothèse $A' = B'$. L'équation (1') devient alors

$$(5) \qquad 2^\lambda d\delta = A'.(a' + b').$$

Comme la somme $a' + b'$ est un nombre pair, nous poserons

$$a' + b' = 2^{i+1}d, \text{ et } A' = 2^{\lambda-i-1}\delta,$$

en désignant par i un nombre entier, nul ou positif, inférieur à λ. Tous les termes de S' qui correspondent à un même système de valeurs des nombres d, δ et i sont égaux à $f(0, 2^{i+1}d)$ et leur nombre est égal à celui des solutions de l'équation $a' + b' = 2^{i+1}d$, c'est-à-dire à $2^i d$. La somme des termes de S' qui correspondent aux mêmes valeurs des nombres d et i est donc $2^i d f(0, 2^{i+1}d)$, et celle des termes qui correspondent à la même valeur de d se déduit de cette expression en donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \ldots \lambda - 1$ et en faisant la somme des résultats. On trouve ainsi

$$d\,[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\lambda-1}f(0, 2^\lambda d)].$$

Enfin la somme de toutes les expressions semblables, relatives à tous les diviseurs de m, désignés par d, exprime la somme de tous ceux des termes de S' qui correspondent à l'hypothèse $A' = B'$. On a donc

$$S' = \sum d\,[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + \ldots + 2^{\lambda-1}f(0, 2^\lambda d)] + 2\sum\nolimits_2 f(A' - B', a' + b'),$$

en désignant par $\sum_2$ une somme restreinte dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation

$$2^\lambda m = A'a' + B'b'$$

qui vérifient la condition $A' > B'$.

15. Par la substitution des expressions précédentes de S' et de S, l'équation (2) devient

$$(6) \quad \sum[f(A-B, a+b) - f(A+B, a-b)] = \sum d\,[f(0,2d) + 2f(0, 4d) + \ldots + 2^{\lambda-1}f(0, 2^\lambda d)]$$
$$- \sum(2^\lambda d - 1)f(2^\lambda d, 0) + 2\sum\nolimits_2 f(A' - B', a' + b') - 2\sum\nolimits_1 f(A + B, a - b).$$

Les sommes $\sum_1$, $\sum_2$ correspondant respectivement aux équations (1) et (1')

avec les restrictions $a-b>0$, $A'-B'>0$. Or, tous les termes de la somme $\sum_1$ sont égaux à des termes différents de la somme $\sum_2$.

En effet, toutes les solutions de l'équation (1) qui vérifient la condition $a-b>0$ correspondent à des solutions de l'équation (1') qui satisfont aux relations

$$\text{(B)} \qquad A'-B' = A+B, \quad a'+b' = a-b,$$

$$f(A', -B', a'+b') = f(A+B, a-b).$$

Pour le démontrer nous écrirons les formules (1) et (1') de la manière suivante :

$$\text{(7)} \qquad 2^\lambda m = (a-b)\, A + (A+B)\, b$$

$$\text{(7')} \qquad 2^\lambda m = (a'+b')\, B' + (A'-B')\, a'.$$

En vertu de la substitution (B), la dernière formule devient

$$\text{(8)} \qquad 2^\lambda m = (a-b)\, B' + (A+B)\, a'.$$

La comparaison des deux formules (7) et (8) montre que l'on vérifie l'équation (7') par des nombres A', B', a', b' qui satisfont aux relations (B) jointes aux suivantes

$$\text{(C)} \qquad B' = A + \theta\,(A+B), \quad a' = b - \theta\,(a-b),$$

où θ désigne un nombre entier quelconque. Lorsque $(a-b)$ et $(A+B)$ ont un diviseur commun, l'équation (7') admet d'autres solutions qui satisfont aux relations (B) sans vérifier les dernières formules; mais nous nous contentons de les mentionner, parce qu'elles sont inutiles pour notre but. La combinaison des formules (B) et (C) donne le système suivant :

$$\text{I.} \quad \left| \begin{array}{l} a' = b - \theta\,(a-b), \quad b' = (\theta+1)\,(a-b) - b, \\ A' = A + (\theta+1)\,(A+B), \quad B' = A + \theta\,(A+B). \end{array} \right.$$

Le nombre θ se trouve complètement déterminé par la condition de donner une valeur positive aux deux nombres a', b', ce qui exige que θ vérifie la double inégalité

$$\theta < \frac{b}{a-b} < \theta + 1.$$

Comme la fraction $b : (a-b)$ ne peut pas se réduire à un nombre entier, puisque b est impair, tandis que $(a-b)$ est pair, on satisfait aux deux inégalités en prenant pour valeur de θ la partie entière de cette fraction. Le nombre θ étant positif, les quatre nombres A', B', a', b' sont positifs; de plus les deux nombres a', b' sont impairs et l'on a $A' > B'$. Par conséquent les formules I font correspondre à la solution (A, B, a, b) de l'équation (1) une solution de l'équation (1') qui satisfait à toutes les conditions supposées dans les éléments de la somme $\sum_2$.

16. Ainsi à toute solution de l'équation (1), vérifiant la condition $a > b$, les équations I font correspondre une solution de l'équation (1'), et une seule, dans laquelle on a $A' > B'$. Il nous reste à démontrer que la même solution (A', B', a', b') ne correspond pas dans les formules I, à deux solutions de l'équation (1). Pour cela nous résolvons ces formules par rapport à la solution (A, B, a, b), ce qui donne le système suivant:

$$\text{II.} \quad \left| \begin{array}{l} A = B' - \theta\,(A' - B'),\ \ B = (\theta + 1)\ (A' - B') - B', \\ a = a' + (\theta + 1)\,(a' + b'),\ \ b = a' + \theta\,(a' + b'). \end{array} \right.$$

Pour que ces formules fussent vérifiées par deux systèmes différents de valeurs des nombres A, B, a, b, il faudrait que l'on pût donner à θ deux valeurs différentes, mais cela est impossible, car les deux nombres A, B étant positifs, le nombre θ doit vérifier les deux inégalités

$$(9) \qquad \theta < \frac{B'}{A' - B'} < \theta + 1,$$

qui le déterminent complètement. Ces inégalités peuvent être impossibles lorsqu'on prend au hazard une solution (A', B', a', b') de l'équation (1'); mais cela n'arrive pas lorsque cette solution a été déterminée par les formules I, parce que la valeur de θ qui figure dans ces formules, correspond nécessairement à des valeurs positives des nombres A et B.

17. Ainsi les formules I font correspondre un terme de la somme $\sum_2$, et un seul, à chaque terme de la somme $\sum_1$, et le même terme de $\sum_2$ ne peut pas correspondre à deux termes différents de $\sum_1$. Comme les termes correspondants sont égaux, on peut poser:

$$\sum\nolimits_2 f(A' - B',\ a' + b') = \sum\nolimits_1 f(A + B,\ a - b) + \sum\nolimits_3 f(A' - B',\ a' + b'),$$

en désignant par $\sum_3$ une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (1') qui, tout en satisfaisant à la condition $A' > B'$, ne correspondent dans les formules I et II à aucune solution de l'équation (1). Ces solutions sont faciles à déterminer; ce sont celles pour lesquelles il est impossible de satisfaire aux inégalités (9) sans que l'une d'elles se change en égalité, ce qui réduit à zero la valeur correspondante de l'un des nombres A ou B. Or cette impossibilité ne se présente que dans le cas où le quotient $B' : (A' - B')$ est entier. Ainsi les solutions de l'équation (1') auxquelles correspondent les termes de la somme $\sum_3$ sont celles qui vérifient les deux conditions

$$A' > B', \quad B' = k\,(A' - B'), \text{ ou } kA' = (k+1)\,B',$$

dans lesquelles k est un nombre entier et positif.

Comme les deux nombres k, $k+1$ sont premiers entre eux, le nombre k doit diviser B'. Désignant donc par μ un nombre entier et positif, on a

$$B' = k\mu, \quad A' = (1+k)\mu. \quad A' - B' = \mu,$$

$$2^\lambda m = \mu\,[k\,(a' + b') + a']. \tag{10}$$

Le facteur $k\,(a' + b') + a'$, étant impair, doit être un diviseur de m. En le désignant par δ et en posant $m = d\delta$, on a

$$\mu = A' - B' = 2^\lambda d, \quad \delta = k\,(a' + b') + a'.$$

On peut prendre successivement comme valeurs de δ tous les diviseurs de m supérieurs à 1. A chaque valeur de δ correspondent autant de termes de $\sum_3$ qu'il y a de nombres pairs, compris entre 0 et δ; car le nombre $a' + b'$ doit être égal successivement à chacun des nombres 2, 4, 6,... $\delta - 1$; on divise δ par chacune de ces valeurs de $a' + b'$ et l'on prend comme valeur de a' le reste de cette division; on a ensuite $b' = (a' + b') - a'$, $B' = k.2^\lambda d$, $A' = (k+1)2^\lambda d$. Le terme correspondant de $\sum_2$ est $f(2^\lambda d,\ a' + b')$ et la somme des termes de $\sum_3$ qoi correspondent à une même valeur de δ est

$$f(2^\lambda d, 2) + f(2^\lambda d, 4) + f(2^\lambda d,\ 6) + .. + f(2^\lambda d,\ \delta - 1).$$

On obtient la somme $\sum_3$ en faisant la somme de toutes les expressions semblables, relatives à tous les diviseurs δ de m, autres que 1. On a donc

$$2\sum_2 - 2\sum_1 = 2\sum_3 = \sum\left[2f(2^\lambda d,\ 2) + 2f(2^\lambda d,\ 4) + \ldots + 2f(2^\lambda d,\ \delta - 1)\right].$$

On peut étendre le signe sommatoire à tous les diviseurs de m, même au diviseur $\delta = 1$, en écrivant

$$2\sum_2 f(A'-A', a'+b') = \sum [f(2^\lambda d, 0) + 2f(2^\lambda d, 2) + 2f(2^\lambda d, 4) + \ldots + 2f(2^\lambda d, \delta-1)]$$
$$- \sum f(2^\lambda d, 0),$$

pourvu que la somme entre parenthèse soit réduite à son premier terme, quand $\delta = 1$.

18. En substituant dans l'équation (6) l'expression précédente de la différence

$$2\sum_2 f(A'-B', a'+b') - 2\sum_1 f(A+B, a-b),$$

on trouve

$$\sum[(f(A-B, a+b) - f(A+B, a-b)] = \sum d[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + \ldots + 2^{\lambda-1}f(0, 2^\lambda d)]$$
$$+ \sum[f(2^\alpha d, 0) + 2f(2^\alpha d, 2) + \ldots + 2f(2^\alpha d, \delta-1)] - 2^\lambda \sum df(2^\lambda\delta, 0).$$

Pour les applications de l'équation obtenue, il est avantageux de mettre en évidence le facteur 2 dans les deux nombres A et B, et de remplacer la somme simple par une somme triple, comme nous l'avons dit au commencement de ce chapitre. Nous poserons $A = 2^\mu\alpha$, $B = 2^\nu\beta$, en désignant par α, β deux nombres impairs et positifs, par μ et ν deux exposants entiers, positifs ou nuls. L'équation (1) sera remplacée par la suivante

$$(11) \qquad 2^\lambda m = 2^\mu a\alpha + 2^\nu b\beta.$$

Nous groupons ensemble toutes les solutions de cette équation dans lesquelles $2^\mu a\alpha$ présente une valeur déterminée $2^\mu m'$, et relativement à ce groupe nous faisons deux sommes, l'une relative à toutes les décompositions de m' en deux facteurs et l'autre à toutes les décompositions semblables de la différence $2^\lambda m - 2^\mu m' = 2^\nu m''$ divisée par 2^ν. Nous obtenons ensuite la somme complète en réunissant tous les résultats semblables relatifs à toutes les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots 2^\lambda m-1$$

de $2^\mu m'$. Notre formule devient donc

$$(e). \quad \sum[\sum\sum(f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta, a+b) - f(2^\mu\alpha + 2^\nu\beta, a-b))] =$$
$$\sum d[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{\lambda-1}f(0, 2^\lambda d)]$$
$$+ \sum[f(2^\lambda d, 0) + 2f(2^\lambda d, 2) + 2f(2^\lambda d, 4) + \ldots + 2f(2^\lambda d, \delta-1)] - 2^\lambda \sum df(2^\lambda d, 0).$$

Les sommes du second membre se rapportent à toutes les solutions de l'é-

quation $m = d\delta$. Les éléments de la triple snmme du premier membre correspondent à tous les systèmes de solutions des équations

$$(12) \qquad 2^\lambda m = 2^\mu m' + 2^\nu m'', \quad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta.$$

Cette formule ne diffère que par les notations, de la formule (e) du cinquième article de Liouville « *Sur quelques formules générales...* » (*Journal de Mathématiques*, 2^{me} *série*, t. III, p. 280).

19. On peut réduire la fonction $f(x, y)$ à une fonction paire de x ou de y. Supposons d'abord qu'elle se réduise à une fonction paire de la seule variable x, c'est-à-dire à une fonction $f(x)$ qui vérifie la condition

$$f(-x) = f(x),$$

pour toutes les valeurs de x employées dans nos formules. La formule (e) se réduit d'abord à la suivante

$$\sum\left[\sum\sum\left(f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta) - f(2^\mu\alpha + 2^\nu\beta)\right)\right] = f(0).\sum d\,(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{\lambda-1})$$
$$+ \sum f(2^\lambda d)\left[1 + 2 + 2 \ldots + 2(-1)^{\delta-1}\right] - 2^\lambda \sum d\, f(2^\lambda\delta),$$

que l'on simplifie en effectuant les sommes indiquées dans les deux premiers termes du second membre. On a

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{\lambda-1} = 2^\lambda - 1, \quad \sum d = \zeta_1(m)$$
$$1 + 2 + 2 + \ldots + 2(-1)^{\delta-1} = 1 + 2\frac{\delta - 1}{2} = \delta;$$

au moyen de ces substitutions notre formule devient

$$(\mathrm{G}) \qquad \sum\left[\sum\sum\left(f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta) - f(2^\mu\alpha + 2^\nu\beta)\right)\right] = (2^\lambda - 1)\, f(0)\,\zeta_1(m)$$
$$+ \sum (\delta - 2^\alpha d)\, f(2^\alpha d).$$

C'est la formule (G) du quatrième article de Liouville (l. c, t. III, p. 242).

De même on peut réduire $f(x, y)$ à une fonction paire de la seule variable y. La formule (e) devient alors

$$(\mathrm{J}) \quad \sum\left[\sum\sum\left(f(a + b) - f(a - b)\right)\right] = \sum d\left[f(2d) + 2f(4d) + \ldots + 2^{\lambda-1} f(2^\lambda d)\right]$$
$$+ \sum\left[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(\delta - 1)\right] - 2^\lambda f(0)\,\zeta_1(m).$$

Cette formule est équivalente à la formule (J) du cinquième article de Liouville (*l. c.* p. 281).

Lorsque dans la formule (e) on prend $f(x, y) = f(x)\,(-1)^{\frac{y}{2}}$, sous la condition $f(x) = f(-x)$, on a d'abord

$$f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta,\ a + b) - f(2^\mu\alpha + 2^\nu\beta,\ a - b) =$$

$$(-1)^{\frac{a+b}{2}} (f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta) + f(2^\mu\alpha + 2^\nu\beta)) = -(-1)^{\frac{a-1}{2}} (-1)^{\frac{b-1}{2}} [f(2^\mu\alpha + 2^\nu\beta) + f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta)].$$

D'un autre côté, la première somme du second membre devient

$$f(0) \sum d\,[(-1)^d + 2\,(-1)^{2d}\, 2^2 + \ldots + 2^{\lambda-1}] = (2^\lambda - 3)\, f(0)\, \zeta_1(m),$$

et la deuxième,

$$\sum f(2^\lambda d)\,[1 - 2 + 2 - \ldots + 2\,(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}] = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} f(2^\lambda d).$$

La formule (e) changée de signe devient donc

$$(\mathrm{K}) \quad \sum \left[\sum\sum (f(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta) + f((2^\mu\alpha + 2^\nu\beta)) (-1)^{\frac{a-1}{2}} (-1)^{\frac{b-1}{2}}\right] = (3 - 2^\lambda)\, f(0)\, \zeta_1(m)$$

$$+ \sum (2^\lambda d - (-1)^{\frac{\delta-1}{2}})\, f(2^\alpha d).$$

C'est la formule désignée par (K) dans le cinquième article de Liouville (*l. c.* p. 282).

18. Le cas où l'exposant λ s'évanouit mérite une attention spéciale. D'abord l'un des deux exposants μ, ν s'évanouit aussi, tandis que l'autre est positif. Le nombre impair m se trouve alors partagé en deux parties, l'une paire et l'autre impaire. La première somme du second membre de la formule (e) s'évanouit; car elle provient de la somme S' (n° 13) et elle correspond à l'hypothèse $A' = B'$ qui est impossible lorsque $\lambda = 0$, parce que les deux nombres A', B' sont alors, l'un pair et l'autre impair. On peut aussi remplacer l'équation $m = 2^\mu m' + 2^\nu m''$, par l'équation $m = m_1 + 2^i m_2$. Il suffit pour cela de grouper deux à deux les termes de la triple somme qui correspondent à des solutions symétriques

$$2^{\mu'}\alpha_1 = 2^\nu\beta,\ 2^{\nu'}\beta'_1 = 2^\mu\alpha,\ a_1 = b,\ b_1 = a.$$

Les deux termes correspondants sont égaux, parce que l'on a

$$2^{\mu'}\alpha_1 + 2^{\nu'}\beta_1 = 2^\mu\alpha + 2^\nu\beta, \quad 2^{\mu'}\alpha_1 - 2^{\nu'}\beta_1 = -(2^\mu\alpha - 2^\nu\beta),$$

$$a_1 + b_1 = a + b, \quad a_1 - b_1 = -(a - b).$$

Nous remplacerons leur somme par le double de celui qui correspond à une valeur impaire de $2^\mu m' = 2^\mu a\alpha$. Notre formule devient donc

$$(d)\qquad 2\sum\left[\sum\sum\left(f(\alpha-2^i\beta,\ a+b)-f(\alpha+2^i\beta,\ a-b)\right)\right]=$$
$$\sum\left[f(d,0)+2f(d,2)+\ldots+2f(d,\delta-1)\right]-\sum df(d,0).$$

La triple somme qui forme le premier membre de cette formule correspond aux trois équations

$$(13)\qquad m=m_1+2^i m_2,\quad m_1=a\alpha,\ m_2=b\beta,$$

en nombres entiers et positifs, tous impairs excepté l'exposant i qui peut être pair ou impair.

19. Lorsque dans la formule (d) on réduit $f(x,y)$ à une fonction paire de la seule variable x ou de la seule variable y, on obtient les deux formules suivantes :

$$(\mathrm{D}).\ 2\sum\left[\sum\sum(f(a+b)-f(a-b))\right]=\sum\left[f(0)+2f(2)+\ldots+2f(\delta-1)\right]-f(0)\zeta,\ (d),$$

$$(\mathrm{F}).\qquad 2\sum\left[\sum\sum f(\alpha-2^i\beta)-f(\alpha+2^i\beta)\right)]=\sum(\delta-d)f(d).$$

Dans ces formules la fonction désignée par f doit vérifier la condition

$$f(x)=f(-x).$$

On vérifie cette condition en prenant

$$f(x)=\mathrm{F}(x+1)-\mathrm{F}(x-1),$$

$\mathrm{F}(x)$ désignant une fonction impaire de x, car on a

$$f(-x)=\mathrm{F}(-x+1)-\mathrm{F}(-x-1)=-\mathrm{F}(x-1)+\mathrm{F}(x+1).$$

Pour trouver ce que devient alors le second membre de la formule (D), il faut remarquer que l'on a

$$f(0)=2\mathrm{F}(1),\ \ 2f(2)=2\mathrm{F}(3)-2\mathrm{F}(1),\ \ 2f(4)=2\mathrm{F}(5)-2\mathrm{F}(3),\ \ldots$$

et par conséquent

$$f(0)+2f(2)+2f(4)+\ldots 2f(\delta-1)=2\mathrm{F}(\delta).$$

La formule (D) divisée par 2 devient

$$(\mathrm{E}).\qquad \sum\left[\sum\sum(\mathrm{F}(a+b+1)-\mathrm{F}(a+b+1)-\mathrm{F}(a-b+1)+\mathrm{F}(a-b-1))\right]=$$
$$\sum\mathrm{F}(d)-\mathrm{F}(1)\zeta_1(m).$$

On déduit encore une formule remarquable de la formule (d), en y rem-

plaçant $f(x,y)$ par $f(x)\ (-1)^{\frac{y}{2}}$, la fonction $f(x)$ étant soumise à la seule condition $f(-x)=f(x)$. Dans ce cas

$$f(\alpha-2^i\beta,\ a+b)=(-1)^{\frac{a+b}{2}}f(\alpha-2^i\beta)$$

$$f(\alpha+2^i\beta,\ a-b)=(-1)^{\frac{a-b}{2}}f(\alpha+2^i\beta)=-(-1)^{\frac{a+b}{2}}f(\alpha+2^i\beta),$$

car les deux nombres a, b étant impairs, l'un des deux nombres $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$ est pair, et l'autre, impair.

D'un autre côté le terme général de la première somme du second membre devient

$$f(d)\left[1-2+2-\ldots+2(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right]=(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}f(d).$$

En substituant ces expressions dans la formule (d) et remplaçant

$$(-1)^{\frac{a+b}{2}}\ \text{par}\ -(-1)^{\frac{a-1}{2}}\ (-1)^{\frac{b-1}{2}}$$

on obtient la formule suivante

$$\text{(I)}\quad 2\sum\left[\sum\sum(-1)^{\frac{a-1}{2}}(-1)^{\frac{b-1}{2}}(f(\alpha+2^i\beta)+f(\alpha-2^i\beta))\right]=\sum\left(d-(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right)f(d).$$

Les formules obtenues ici ne diffèrent que par les notations, des formules générales, désignées par les mêmes lettres dans le troisième et dans le cinquième article de Liouville (*l. c.* t. III, p. 201, 273).

20. Nous pourrions démontrer d'une manière semblable d'autres formules générales données par Liouville dans son quatrième et dans son cinquième article. Mais il est plus intéressant de montrer par des exemples le parti que l'on peut tirer de ces formules. Liouville a considéré plus particulièrement les conséquences que l'on peut on déduire lorsqu'on égale $f(x)$ à une puissance paire de x, ou $F(x)$ à une puissance de degré impair. Il a aussi indiqué comme donnant des résultats intéressants plusieurs formules que l'on déduit des précédentes en prenant $f(x)=\operatorname{Cos}xt$. Ce sont ces dernières formules que je me propose d'étudier afin d'en déduire divers théorèmes concernant certaines formes quadratiques quaternaires. Mais pour obtenir ces

théorèmes nous devrons nous appuyer sur quelques propositions relatives à la représentations des nombres entiers par les formes quadratiques binaires de déterminant négatif.

CH. IV. *Expression analytique du nombre des représentations d'un nombre donné* m *par certaines formes quadratiques binaires.*

21. Jacobi a trouvé par la théorie des fonctions elliptiques que le nombre des décomposition du double d'un nombre donné impair m en deux carrés est égal à l'excès du nombre des diviseurs $4x+1$ de m sur le nombre de ses diviseurs $4x+3$. Dans ces décompositions les racines des deux carrés sont considérées comme positives, c'est pourquoi il faut quadrupler le nombre précédent pour obtenir le nombre des représentations de $2m$ par la forme x^2+y^2, ou bien, ce qui est la même chose, le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2$$

en nombres entiers x, y positifs ou négatifs. Si l'on désigne avec Liouville par $\rho(m)$ la somme $\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}$ relative à tous les diviseurs du nombre impair m, désignés indéfiniment par d, le nombre des décompositions de $2m$ en deux carrés impairs est égal à $\rho(m)$; le nombre des représentations de $2m$ par la forme $(1, 0, 1)$ est exprimé par $4\rho(m)$.

22. Ce Theorème de Jacobi n'est qu'un cas particulier d'un théorème démontré par Dirichlet dans ses *Recherches sur les applications de l'Analyse à la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. XXI, paragraphe VII). On le déduit des deux théorèmes suivants:

I. Si $D = P.S^2$, S^2 désignant le plus grand carré qui divise D, et que $\varpi(n)$ répresente le nombre de toutes les solutions des congruences

$$x^2 \equiv D \ (\text{mod. } n), \ x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e^2}\right), \ x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e'^2}\right), \ldots,$$

dans lesquelles n est un nombre premier avec $2D$, dont tous les diviseurs carrés, autres que 1, sont e^2, e'^2, ..., le nombre $\varpi(n)$ est exprimé par la formule

$$\varpi(n) = \sum \left(\frac{P}{i}\right)$$

où $\left(\frac{P}{i}\right)$ est le symbole de Legendre généralisé par Jacobi, et la somme $\sum$ doit s'étendre à tous les diviseurs i de n.

II. Soient e^2, e'^2, e''^2,... tous les diviseurs carrés autres que 1, d'un nombre impair n, et désignons par $\varpi(n)$ le nombre de toutes les solutions diverses des congruences

$$x^2 \equiv D \ (\text{mod. } n), \ x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e^2}\right), \ x^2 \equiv D \left(\text{mod. } \frac{n}{e'^2}\right), \ldots;$$

Si D est négatif et différent de -1, le nombre des représentations de n par l'ensemble des formes qui représentent les diverses classes de l'ordre proprement primitif de déterminant D, sera $2\varpi(n)$; ce nombre sera $4\varpi(n)$, si $D = -1$. Si pour un déterminant négatif D, on désigne par Ω un système de formes représentant les diverses classes de l'ordre improprement primitif, le nombre des représentations de $2n$ par l'ensemble des formes Ω est $2\varpi(n)$, si D est différent de -3; il est égal à $6\varpi(n)$, si $D = -3$.

En réunissant ces deux propositions, on obtient la suivante, due à Dirichlet :

III. Si l'on désigne par Ω l'ensemble des formes quadratiques

$$(a, b, c), \quad (a', b', c'), \quad (a'', b'', c''), \ldots.$$

propres à représenter toutes les classes du même ordre primitif de déterminant négatif D, et par n un nombre impair, premier avec D, le nombre des représentations de n par les formes Ω est exprimé

$$\text{par } 2\sum\left(\frac{D}{i}\right) \text{ ou par } 4\sum\left(\frac{D}{i}\right),$$

suivant que D est < -1 ou $= -1$.

Le nombre des représentations de $2n$ par l'ensemble des formes Ω qui représentent l'ordre improprement primitif de déterminant D, est exprimé par la formule

$$2\sum\left(\frac{D}{i}\right)$$

si D est différent de -3, et par la formule

$$6\sum\left(\frac{D}{i}\right)$$

si $D = -3$.

Dans toutes ces formules $\left(\frac{D}{i}\right)$ est le symbole généralisé de Jacobi, $\sum$ désigne une somme dont les éléments correspondent à tous les diviseurs de n, représentés indéfiniment par i, enfin les deux nombres n et D sont premiers entre eux.

Lorsque D est de la forme PS^2, on a

$$\left(\frac{D}{i}\right) = \left(\frac{P}{i}\right)\left(\frac{S^2}{i}\right) = \left(\frac{P}{i}\right),$$

pour tout nombre impair i premier avec D.

23. Pour simplifier les formules que nous avons en vue, nous introduirons une fonction numérique définie par la formule

$$\varpi(m, -D) = \sum\left(\frac{D}{i}\right),$$

dans laquelle nous désignons par D un déterminant négatif, par m un nombre impair premier avec D, et par i un diviseur quelconque de m. Dans le cas particulier ou $D = -1$, la fonction $\varpi(m, 1)$ coïncide avec la fonction numérique $\rho(m)$ de Liouville; nous conserverons cette dernière fonction, et nous emploierons la formule $\varpi(m, -D)$ pour les autres valeurs de D.

Lorsque le déterminant D ne présente qu'une classe de formes quadratiques par genre, toutes les représentations du nombre m par les diverses formes Ω appartiennent à une seule de ces formes, savoir celle qui représente le genre caractérisé par le reste de la division du nombre m par $-4D$ ou par $-8D$, suivant la forme du nombre $-D$. Soit par exemple $D = -6$. Le déterminant -6 n'offre que deux genres représentés réspectivement par les deux formes $x^2 + 6y^2$, $2x^2 + 3y^2$. Un nombre impair m est représenté par la première forme ou par la seconde, suivant qu'il est de l'une des deux formes $24l + 1$, $24l + 7$, ou bien de l'une des deux formes $24l + 5$, $24l + 11$; pourvu toutefois qu'il soit diviseur de la formule $u^2 + 6$. Le nombre des représentation de m par l'une de ces forme est exprimé par la formule

$$2\varpi(m, 6) = 2\sum\left(\frac{-6}{i}\right);$$

de plus $\varpi(m, 6)$ se réduit à zéro, lorsque le nombre m n'est pas diviseur de la formule $u^2 + 6$.

24. De même, quand $D=-1$, le système Ω se réduit à la forme x^2+y^2. L'expression $4\rho(m)$ donne le nombre des représentations de m par la somme de deux carrés. Elle exprime aussi le nombre des représentations du double de m par la même forme. Car les deux équations

$$2m = p^2 + q^2, \quad m = x^2 + y^2$$

admettent le même nombre de solutions; on passe de l'une à l'autre en posant $p = x + y$, $q = x - y$, et inversement

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2}.$$

Chaque système de valeurs de x et de y détermine un système unique de valeurs de p et de q, et ces valeurs sont nécessairement impaires, puisque les deux nombres x, y sont, l'un pair et l'autre impair. Inversement chaque système de valeurs de p et de q détermine un système de valeurs entières des deux nombres x, y; car dans l'équation $2m = p^2+q^2$, les deux nombres p et q sont nécessairement impairs.

Il résulte de là que le nombre des décompositions du double d'un nombre impair m en une somme de deux carrés impairs est exprimé par $\rho(m)$; car à chaque décomposition correspondent quatre représentations, par les quatre combinaisons des signes des deux racines; le nombre des décompositions est donc le quart de celui des représentations; et comme ce dernier nombre est exprimé par $4\rho(m)$, le premier est exprimé par $\rho(m)$.

Le symbole $\left(\frac{-1}{i}\right)$ se réduit à $+1$ ou à -1 suivant que i est de la forme $4l+1$, ou de la forme $4l+3$; on peut donc le remplacer par $(-1)^{\frac{i-1}{2}}$ La fonction $\rho(m)$ exprime l'excès du nombre des diviseurs de m qui sont de la forme $4l+1$ sur le nombre de ceux qui sont de la forme $4l+3$. Nous retrouvons ainsi le théoréme de Jacobi, cité au commencement de ce Mémoire, comme cas particulier du Théorème de Dirichlet.

25. La même expression $4\rho(m)$ donne aussi le nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2,$$

quel que soit l'exposant entier α, positif ou nul. Soit en effet λ l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise en même temps x et y; si l'on pose $x = 2^\lambda u$, $y = 2^\lambda v$, on a

$$2^{\alpha-2\lambda}\, m = u^2 + v^2.$$

Comme l'un au moins des deux nombres u, v est impair, on ne peut faire que deux hypothèses: ou bien ils sont tous deux impairs, ou bien ils sont, l'un pair et l'autre impair. Dans ce dernier cas, on a $\alpha - 2\lambda = 0$; dans le premier, $\alpha - 2\lambda = 1$. L'équation proposée se ramène donc a l'une des équations

$$2m = x^2 + y^2, \quad m = x^2 + y^2.$$

Dans les deux cas le nombre des solutions de cettc équation est exprimé par $4\rho(m)$.

Le nombre des solutions de l'équation $m = x^2 + 4y^2$ est exprimé par $2\rho\,(m)$; car si l'on fait $D = -4$ dans le théorème III (n° 22), on trouve que le nombre des représentations de m par la forme $(1, 0, 4)$ est exprimé par $2\varpi\,(m, 4)$. Dailleurs en vertu de l'égalité

$$\left(\frac{-4}{i}\right) = \left(\frac{-1}{i}\right)\left(\frac{4}{i}\right) = \left(\frac{-1}{i}\right),$$

les deux fonctions $\varpi\,(m, 4)$ et $\varpi\,(m, 1) = \rho\,(m)$ sont égales; le nombre de ces représentations est donc exprimé par $2\rho\,(m)$.

Le même résultat s'obtient aussi par cette considération que toute solution de l'équation $m = x^2 + (2y)^2$, en donne deux de l'équation $m = u^2 + v^2$, par la permutation des deux carrés:

23. Soit $D = -2$. Ce déterminant ne présente qu'une seule classe de formes quadratiques, représentée par la forme $x^2 + 2y^2$. Le nombre des solutions de l'équation

$$(a) \qquad m = x^2 + 2y^2$$

est donc exprimé par la formule

$$2\varpi\,(m, 2) = 2\sum\left(\frac{-2}{i}\right) = 2\sum\,(-1)^{\frac{i^2-1}{8}+\frac{i-1}{2}}.$$

Cette fonction $\varpi\,(m, 2)$ exprime l'excès du nombre des diviseurs de m compris dans les deux formules $8l + 1$, $8l + 3$, sur le nombre de ceux qui sont compris dans les deux formules $8l + 5$, $8l + 7$.

La même expression donne aussi le nombre des solutions de l'équation

$$(b) \qquad 2^\alpha m = x^2 + 2y^2.$$

Si l'exposant α est >1, les deux nombres x, y sont pairs; soit donc λ l'exposant de la plur haute puissanre de 2 qui divise en même temps ces deux nombres, et posons

$$x = 2^{\lambda}p, \quad y = 2^{\lambda}q.$$

L'équation (b) se change en la suivante

$$2^{\alpha-2\lambda}\, m = p^2 + 2q^2,$$

dans laquelle l'un des deux nombres p, q est impair. Si p est impair on a $\alpha = 2\lambda$. Si p est pair, posons $p = 2r$; on a

$$2^{\alpha-2\lambda-1}\, m = q^2 + 2r^2,$$

et comme dans ce cas le nombre q est nécessairement impair, on a $\alpha=2\lambda+1$. Dans les deux cas, les solutions de l'équation (b) correspondent une à une à celles de l'équation (a). Par conséquent le nombre des représentations de $2^{\alpha}m$ par la forme $x^2 + 2y^2$ est égal à $2\varpi\,(m,\, 2)$, quelque soit l'exposant α.

27. Soit $D = -3$. L'Ordre proprement primitif pour le déterminant -3 se compose d'une seule classe représentée par la forme $x^2 + 3y^2$. Le théorème III revient donc à celui-ci: Le nombre des représentations d'un nombre impair m, non divisible par 3, par la forme $x^2 + 3y^2$ est égal à $2\varpi(m,3)$. De même, le nombre des représentations de $2m$ par la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2$ est égal à $6\varpi\,(m,\, 3)$.

Il est facile d'exprimer le nombre des représentations d'un nombre entier quelconque n par la forme $x^2 + 3y^2$. Soit en effet $n = 2^{\alpha}, 3^{\beta}m$, m étant toujours premier avec 6. Supposons d'abord $\alpha = 0$. L'équation

$$3^{\beta}m = x^2 + 3y^2$$

exige que x soit divisible par 3; nous désignons par λ l'exposant de la plus haute puissance de 3 qui divise en même temps x et y, et nous posons $x = 3^{\lambda}p$, $y = 3^{\lambda}q$. L'équation proposée devient

$$3^{\beta-2\lambda}\, m = p^2 + 3q^2.$$

On conclut de là que le nombre des représentations de $3^{\beta}m$ par la forme $x^2 + 3y^2$ est le même que celui des représentations de m par la même forme; il est exprimé par $2\varpi\,(m,\, 3)$. On peut dire aussi que ce nombre est exprimé par

$$2\varpi\,(n,\, 3) = 2\sum\left(\frac{-3}{i}\right),$$

en étendant la somme $\sum$ à tous les diviseurs de n, désignés indéfiniment par i, mais à la condition de réduire à zéro la valeur du symbole $\left(\frac{-3}{i}\right)$ lorsque le nombre i n'est pas premier avec 3.

Soit $n=2^\alpha m$. Les représentations de $2^\alpha m$ par les formes quadratiques de déterminant -2 appartiennent à l'ordre proprement primitif ou à l'ordre improprement primitif, suivant que α est pair ou impair. Dans les deux cas, si α est >0, le nombre des représentations de $2^\alpha m$ par la forme x^2+3y^2 ou par la forme $2x^2+2xy+2y^2$ est égal à $6\varpi(m,3)$. Soit d'abord $\alpha=2$. Le nombre des représentations de $4m$ par la forme $(1, 0, 3)$ est le même que celui des représentations de $2m$ par la forme $(2, 1, 2)$; car à chaque solution de l'équation

$$2m = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

correspond une solution de l'équation

$$4m = (2x+y)^2 + 3y^2 = p^2 + 3q^2,$$

et réciproquement, à chaque solution de la dernière équation correspond une solution de la première par les formules

$$x = \frac{p-q}{2}, y = q,$$

car les deux nombres p, q sont toujours tous deux pairs ou tous deux impairs. On passe ensuite à une valenr quelconque de l'exposant α, en remarquant que les deux équations

$$2^{2\lambda+2}\, m = x^2 + 3y^2, \quad 2^{2\lambda+1}\, m = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

exigent que les deux nombres x, y soient divisibles en même temps par 2^λ.

Enfin lorsque le nombre m est divisible par 3, le nombre des représentations de $2^\alpha m$ par la forme x^2+3y^2 ou par la forme $2x^2+2xy+2y^2$, suivant que α est pair ou impair, est égal à $2\varpi(m,3)$, si $\alpha=0$, et à $6\varpi(m,3)$, si α est >0, mais à la condition de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{-3}{i}\right)$ dans la formule

$$\varpi(m,3) = \sum\left(\frac{-3}{i}\right),$$

lorsque i n'est pas premier avec 3.

28. Prenons encore $D = 6$. Tous les diviseurs de la formule $x^2 + 6$ sont représentés par l'une des deux formes $(1, 0, 6)$, $(2, 0, 3)$, et chacun de ces diviseurs par une seule d'entre elles. Le nombre des représentations de m par celle de ces deux formes qui lui convient, en supposant m premier avec 6, est égal à $2\varpi(m, 6)$. Cette même expression donne aussi le nombre des représentations de $2m$; car les deux équations

$$m = x^2 + 6y^2, \quad m = 2x^2 + 3y^2$$

entrainent respectivement les deux suivantes

$$2m = 2x^2 + 3(2y)^2, \quad 2m = (2x) + 6y^2.$$

Pour un nombre quelconque $n = 2^\alpha . 3^\beta m$, le nombre des solutions de l'équation

$$n = 2^\alpha . 3^\beta m = x^2 + 6y^2 \text{ ou } 2x^2 + 3y^2,$$

est encore exprimé par $2\varpi(m, 3)$. On le démontre en remarquant que si α et β sont supérieurs à l'unité, les deux nombres x et y sont nécessairement divisibles par 2 et par 3, de sorte que les représentations du nombre n par le système des deux formes $(1, 0, 6)$, $(2, 0, 3)$ se ramènent à celles de l'un des nombres m, $2m$, $3m$, $6m$. D'ailleurs les représentations des deux derniers nombres se ramènent à celles des deux premiers. Car si l'on a

$$3m = x^2 + 6y^2,$$

le nombre x doit être multiple de 3; posant donc $x = 3z$ et divisant par 3, on a

$$m = 2y^2 + 3z^2.$$

Inversement en multipliant par 3 tous les termes de la dernière équation on a

$$3m = (3z)^2 + 6y^2.$$

Par conséquent les deux équations admettent le même nombre de solutions.

Le nombre des représentions de $2^\alpha . 3^\beta m$ par celle des deux formes $(1, 0, 6)$, $(2, 0, 3)$ qui lui convient, est égal à $2\varpi(m, 6)$. On peut aussi l'exprimer par la formule

$$2\varpi(3^\beta m, 6) = 2\sum \left(\frac{-6}{i}\right)$$

dans laquelle on désigne indéfiniment par i tous les diviseurs de $3^\beta m$, en convenant de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{-6}{i}\right)$ lorsque le nombre i n'est pas premier avec 6.

CH. V. *Application des formules précédentes à quelques formes quadratiques quaternaires.*

29. On obtient des résultats intéressants relativement à plusieurs formes quadratiques quaternaires, en faisant $f(x) = \cos xt$ dans les formules générales formées au moyen d'nne fonction paire $f(x)$ de la seule variable x. Dans toutes ces formules on aura

$$f(a-b) - f(a+b) = 2\sin at.\ \sin bt,$$

$$f(a-b) + f(a+b) = 2\cos at.\ \cos bt,$$

de sorte que dans la somme triple du premier membre, les intégrations relatives aux deux équations $m' = a\alpha$, $m'' = b\beta$ se trouvent séparées. La transformation du second membre varie suivant la formule considérée. Dans les formules (A) et (a), la différence

$$f(0) - f(2dt) \text{ ou } f(0) - f(2^\lambda dt)$$

devient

$$2\sin^2 dt \text{ ou } 2\sin^2.\ 2^{\lambda-1}\,dt.$$

Ces deux formules se réduisent donc aux deux suivantes :

$$(1) \qquad \sum\left[\sum \sin at.\ \sum \sin bt\right] = \sum d.\ \sin^2 dt, \quad m = d\delta,$$

$$(2) \qquad \sum\left[\sum \sin at.\ \sum \sin bt\right] = 2^{\lambda-1} \sum d \sin^2 (2^{\lambda-1}\,dt),$$

dont la première se rapporte aux solutions des équations

$$2m = m' + m'', \quad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta,$$

et la deuxième, à celles des trois suivantes

$$2^\lambda m = m' + m'', \quad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta.$$

Dans toutes ces équations, les nombres m', m'', a, α, b, β, sont impairs et positifs. La première formule se déduit de la deuxième en faisant $\lambda = 1$.

30. Dans les formules (D), (F) et (I) la triple somme du premier membre correspond aux divers systèmes de solutions des trois équations

$$m = m_1 + 2^i m_2, \quad m_1 = a\alpha, \quad m_2 = b\beta,$$

et le second membre, aux diverses décompositions $m = d\delta$ du nombre im-

pair m en deux facteurs. Le second membre de la formule (D) dépend de la somme

$$1 + 2\cos 2t + 2\cos 3t + \ldots + 2\cos(\delta - 1)t = \frac{\sin\delta t}{\sin t}.$$

Dans les autres formules, la transformation n'offre pas de difficulté. On trouve ainsi les formules suivantes:

$$(3) \qquad 4\sum\left[\sum \sin at.\ \sum \sin bt\right] = \zeta_1(m) - \sum \frac{\sin\delta t}{\sin t}$$

$$(4) \qquad 4\sum\left[\sum \sin at.\ \sum \sin 2^i bt\right] = \sum(\delta - d)\cos dt,$$

$$(5) \qquad 4\sum\left[\sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}\cos \alpha t.\ \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos 2^i\beta t\right] = \sum\left(d - (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right)\cos dt.$$

Enfin la même substitution ramène les formules (G) et (J) aux deux suivantes :

$$(6) \qquad 2\sum\left[\sum \sin 2^\mu at.\ \sum \sin 2^\nu at\right] = (2^\lambda - 1)\zeta_1(m) + \sum(\delta - 2^\lambda d)\cos(2^\lambda dt).$$

$$(7) \qquad 2\sum\left[\sum \sin at.\ \sum \sin bt\right] = 2^\lambda\zeta_1(m) - \frac{\sum\sin\delta t}{\sin t} -$$

$$\sum d\left[\cos 2dt + 2\cos 4dt + 4\cos 8dt + \ldots + 2^{\lambda-1}\cos(2^\lambda dt)\right].$$

Les premiers membres des deux dernières formules se rapportent aux divers systèmes de solutions des trois équations

$$2^\lambda m = 2^\mu m' + 2^\nu m'', \quad m' = a\alpha, \quad m'' = b\beta,$$

en nombres impairs et positifs m', m'', a, α, b, β; les exposans μ, ν sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs ou impairs. Pour chaque partition du nombre donné $2^\lambda m$ en deux parties entières et positives $2^\mu m'$, $2^\nu m''$, les sommes

$$\sum \sin 2^\mu at, \ \sum \sin at$$

correspondent aux diverses solutions de l'équation $m' = a\alpha$, et les sommes

$$\sum \sin 2^\nu bt, \ \sum \sin bt$$

à celles de l'équation $m'' = b\beta$.

31. Faisons d'abord $t = \frac{\pi}{2}$ dans la formule (1). On a

$$\sin at = \sin a \frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{a-1}{2}}.$$

Posant donc, suivant la notation expliquée précédemment (n° 24).

$$\rho(m') = \sum (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \quad \rho(m'') = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}}$$

on obtient la formule suivante

$$(a) \qquad \sum \rho(m).\,\rho(m'') = \sum d = \zeta_1(m).$$

Pour chaque partition de $2m$ en deux parties impaires m', m'', le produit $\rho(m')\,\rho(m'')$ exprime le nombre de toutes les décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs, dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale à $2m'$ et la somme des deux autres, à $2m''$. Le premier membre de la formule précédente exprime donc le nombre de toutes les décomposition de $4m$ eu une somme de quatre carrés impairs. Cette formule est donc l'expression analytique du théorème de Jacobi:

Le nombre des décompositions du quadruple d'un nombre impair m en quatre carrés impairs est égal à la somme des diviseurs de m.

En multipliant la formule (a) par 4 on trouve

$$(b) \qquad \sum 2\rho\,(m').\,2\rho\,(m'') = 4\zeta_1(m).$$

Nous avons vu que le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme $x^2 + 4y^2$ est exprimé par $2\varpi(m, 4) = 2\rho\,(m)$ (n° 25). Le premier membre de la formule (b) est donc égal au nombre des solutions de l'équation

$$(8) \qquad 2m = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4v^2;$$

par conséquent la formule (b) exprime ce théorème:

Le nombre des représentations du double d'un nombre impair m *par la fosme* $x^2 + y^2 + 4z^2 + 4v^2$ *est égal à quatre fois la somme des diviseurs de* m.

En multipliant par 16 les deux membres de l'équation (a) on trouve

$$\sum 4\rho(m').\,4\rho(m'') = 16\zeta_1(m).$$

Or, pour tout nombre impair m, le nombre des représentations de m par une somme de deux carrés est $4\rho(m)$. Par conséquent le produit

$$4\rho(m').\,4\rho(m'')$$

exprime le nombre des représentations de $2m$ par la somme de quatre carrés, dont les deux premiers forment une somme égale au nombre impair m'. La somme de tous les produits semblables, qui correspondent aux valeurs successives $1, 3, 5, \ldots 2m-1$ de m', exprime donc le nombre de toutes les représentations de $2m$ par une somme de quatre carrés, dont les deux premiers forment une somme impaire, ainsi que les deux derniers. Notre formule exprime que le nombre de ces représentations est égal à 16 fois la somme des diviseurs de m.

32. Dans la même formule (1), faisons $t = \frac{\pi}{4}$. En ayant égard aux formules

$$\sin \frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{\frac{a^2-1}{8} + \frac{a-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-2}{a}\right), \quad \sum \left(\frac{-2}{a}\right) = \varpi\,(m', 2),$$

On obtient la formule suivante

$$\sum \varpi\,(m', 2).\ \varpi\,(m'', 2) = \sum d = \zeta_1\,(m),$$

$$\sum 2\varpi\,(m', 2).\ 2\varpi\,(m'', 2) = 4\zeta_1\,(m),$$

Comme $2\varpi\,(m', 2)$ et $2\varpi\,(m'', 2)$ expriment respectivement les nombres des représentations de m' et de m'' par la forme $x^2 + 2y^2$, le premier membre de la dernière formule exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(9) \qquad 2m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

dans lesquelles x et y ont des valeurs impaires. Notre formule exprime que le nombre de ces solutions est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m. Ce n'est pas le nombre de toutes les solutions ; car outre celles dont nous venons de parler, l'équation (9) en admet d'autres dans lesquelles x et y ont des valeurs paires; celles-ci correspondent aux solutions de l'équation

$$(10) \qquad m = z^2 + t^2 + 2u^2 + 2v^2,$$

par les formules $x = 2u$, $y = 2v$.

La même substitution $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (2) donne

$$\sum \varpi(m', 2)\ \varpi(m'', 2) = 2\zeta_1\,(m) \text{ ou } 0,$$

suivant que λ est égal à 2 ou supérieur à 2. On conclut de là que le nombre des solutions de l'équation

$$(11) \qquad 4m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

dans lesquelles les nombres x et y sont impairs, est égal à huit fois la somme des diviseurs de m, et que l'équation

$$2^{i+2}\, m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

n'admet aucune solution dans laquelle x et y soient des nombres impairs, lorsque le nombre i est positif.

Ce dernier résultat peut se prévoir à priori; car dans la partition

$$2^{i+2}\, m = m' + m'',$$

si i est >0, l'un des deux nombres m' ou m'' est toujours de l'une des deux formes $8l+5$ ou $8l+7$; or aucun nombre de l'une de ces deux formes n'est représenté par la forme $x^2 + 2y^2$. Par conséquent, pour toutes les solutions de la dernière équation en nombres impairs et positifs m', m'', l'un des deux facteurs $\varpi(m', 2)$ ou $\varpi(m'', 2)$ se réduit à zéro.

33. En faisant $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (3), on obtient les deux formules suivantes:

$$(a) \qquad 4\sum \rho(m_1)\, \rho(m_2) + \rho(m) = \zeta_1(m)$$

$$(b) \qquad 2\sum \varpi(m_1, 2).\ \varpi(m_2, 2) + \varpi(m, 2) = \zeta_1(m).$$

Le produit $4\rho(m_1).\ 4\rho(m_2)$ exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(12) \qquad m = x^2 + y^2 + 2^i(z^2 + t^2),\ i > 0,$$

dans lesquelles la somme des deux premier carrés est égale à m_1. Par conséquent la somme

$$\sum 4\rho(m_1).\ 4\rho(m_2)$$

exprime le nombre des solutions de l'équation (12) dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est un nombre impair, inférieur à m. Si l'on ajoute à ce nombre celui des solutions dans lesquelles $x^2 + y^2 = m$, savoir $4\rho(m)$, on obtient le nombre de toutes les solutions de l'équation (12), et la formule (a) exprime que ce nombre est égal à $4\zeta_1(m)$.

Dans le cas où le nombre m est de la forme $4n+3$, le nombre i est constamment égal à 1; car m_1 étant de la forme $4l+1$, $m - m_1 = 2^i m_2$ est de la forme $4l+2$. Dans ce cas l'équation (a) exprime le théorème suivant:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(13) \qquad \mathrm{m} = 4\mathrm{n} + 3 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 2(\mathrm{z}^2 + \mathrm{t}^2)$$

est égal à quatre fois la somme des diviseurs du nombre m.

Dans le même cas où $m = 4n + 3$, l'équation (a) mise sous la forme suivante:

$$(a) \qquad \sum 2\rho(m_1) . 2\rho(m_2) = \zeta_1(m),$$

exprime que:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(14) \qquad \mathrm{m} = 4\mathrm{n} + 3 = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y}^2 + 4\mathrm{z}^2 + 8\mathrm{t}^2$$

est égal à la somme des diviseurs de m.

Car $2\rho(m_1)$ exprime le nombre des représentations de m_1 par la forme $(x^2 + 4z^2)$; par conséquent le produit $2\rho(m_1) . 2\rho(m_2)$ exprime le nombre des solutions de l'équation (14), dans lesquelles $x^2 + 4z^2 = m_1$ et $y^2 + 4t^2 = m_2$; la somme de tous les produits semblables, qui correspondent aux valeurs $1, 5, \ldots m - 2$, de m_1, c'est-à-dire le premier membre de la formule (a'), exprime le nombre de toutes les solutions de l'équation (14).

34. La formule (a) peut encore s'interpréter d'une autre manière et donner le nombre des représentations d'un nombre impair quelconque m par la somme de quatre carrés. En effet, ces représentations peuvent se partager en trois groupes, celles où les deux premiers carrés sont nuls, celles où les deux derniers carrés sont nuls, et enfin celles où la somme des deux premiers carrés est positive ainsi que celle des deux derniers. Or le nombre des représentations comprises dans chacun des deux premiers groupes est égal à celui des représentations de m par la somme de deux carrés; il est exprimé par $4\rho(m)$, et le nombre des termes des deux groupes, par $8\rho(m)$. Le nombre des représentations du troisième groupe est le double du nombre de celles dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est un nombre impair, inférieur à m; car à chacune de ces dernières représentations il en correspond une autre dans laquelle la somme des deux premiers carrés est un nombre pair; ces deux représentations se déduisent l'une de l'autre en échangeant les deux derniers carrés avec les deux premiers, sans altérer autrement l'ordre de ces carrés. D'ailleurs le nombre des représentations de m par une somme de quatre carrés dont les deux

premiers forment une somme impaire, inférieure à m, est exprimé par la somme

$$\sum 4\rho(m_1).\ 4\rho\ (m_2)$$

étendue à toutes les solutions de l'équation $m = m_1 + 2^i m_2$, en nombres impairs et positifs m_1, m_2; car le produit $4\rho(m_1).4\rho\,(m_2)$ exprime le nombre de toutes les combinaisons possible des solutions des deux équations

$$m_1 = x^2 + y^2, \quad 2^i m_2 = z^2 + t^2;$$

la somme de tous les produits semblables est donc égale au nombre des solutions de l'équation

$$(15) \qquad m = 2l + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

dans lesquelles la somme $x^2 + y^2$ est un nombre impair, inférieur à m. Le double de cette somme est égal au nombre de toutes les solutions de l'équation (15) dans lesquelles $x^2 + y^2$ et $z^2 + t^2$ sont > 0.

Par conséquent le nombre de toutes les solutions de l'équation (15) est égal à

$$8\rho(m) + 2\sum 4\rho(m_1).\ 4\rho(m_2) = 8\zeta_1\,(m):$$

Le nombre des représentations d'un nombre impair quelconque m *par une somme de quatre carrés, à racines positives, négatives ou nulles, est égal à huit fois la somme des diviseurs de* m.

35. L'interprétation de la formule (*b*) n. 33, repose sur ce fait démontré plus haut (n.° 26), que le nombre des représentations de $2^\alpha m$ par la forme (1, 0, 2) est exprimé par $2\varpi\,(m,\ 2)$, quel que soit l'exposant entier α, nul ou positif. Le produit $2\varpi(m_1,\ 2).\ 2\varpi(m_2,\ 2)$ exprime le nombre de toutes les combinaisons de chacune des solutions de l'équation $m_1 = x^2 + 2y^2$, avec chacune des solutions de l'une des deux équations $m_2 = z^2 + 2t^2$ ou $2^i m_2 = z^2 + 2t^2 = 2t^2 + 4u^2$. La somme de tous les produits semblables est donc égale au nombre des solutions soit de l'équation

$$(16) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2^i\,(z^2 + 2t^2),\ \ i > 0$$

soit de l'équation

$$(17) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2t^2 + 4u^2,$$

dans lesquelles $x^2 + 2y^2$ est $< m$. On aura le nombre de toutes les solu-

tions de chacune de ces deux équations en ajoutant le nombre $2\varpi(x, 2)$ des solutions dans lesquelles $x^2 + 2y^2 = m$. La formule (*b*) multipliée par 2, exprime que le nombre de ces solutions est égal à $2\zeta_1(m)$.

36. En faisant $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (4), on a

$$4\sum\left[\sum \sin a \frac{\pi}{4}. \sum \sin \frac{2^i b\pi}{4}\right] = \sum (\delta - d) \cos \frac{d\pi}{4}.$$

Comme le facteur $\sin\left(\frac{2^i b\pi}{4}\right)$ s'évanouit pour toute valeur entière de i supérieure à 1, il suffit de considérer les équations

$$m = m_1 + 2m_2, \ m_1 = a\alpha, \ m_2 = b\beta.$$

Or on a

$$\sin \frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2}{a}\right), \ \operatorname{Cos} \frac{d\pi}{4} = \frac{(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}}{\sqrt{2}}, \ \sin \frac{2b\pi}{4} = (-1)^{\frac{b-1}{2}},$$

$$\sum \sin \frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varpi(m_1, 2), \ \sum \sin \frac{2b\pi}{4} = \rho(m_2).$$

La formule précédente devient donc

$$4\sum \varpi(m_1, 2). \rho(m_2) = \sum (\delta - d) \ (-1)^{\frac{d^2-1}{8}}, \ d\delta = m.$$

Comme l'équation $m = d\delta$ est symétrique par rapport aux deux lettres d, δ, on a

$$\sum \delta (-1)^{\frac{d^2-1}{8}} = \sum d \, (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}},$$

de sorte que notre formule peut s'écrire

$$(c) \qquad \sum 4\rho\, (m_2)\ 2\varpi(m_1, 2) = 2\sum d \left((-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} - (-1)^{\frac{d^2-1}{8}}\right).$$

Le premier membre de cette formule s'interprète de la manière suivante. Pour chaque solution de l'équation $m = m_1 + 2m_2$ en nombres impairs et positifs, le produit $4\rho(m_2). 2\varpi(m_1, 2)$ exprime le nombres de toutes les combinaisons possibles d'une solution de l'équation $2m_2 = x^2 + y^2$, avec une solution de l'équation $m_1 = z^2 + 2t^2$; ce nombre est évidemment égal à celui des solutions de l'équation

$$(18) \qquad m = i^2 + i_1^2 + i_2^2 + 2t^2$$

dans lesquelles les trois premiers carrés sont impairs et les deux premiers forment une somme égale à $2m_2$. La somme de tous les produits semblables qui correspondent aux valeurs $2, 4, 6, \ldots m-1$ de $2m_2$, exprime le nombre de toutes les solutions de l'équation (18), qui correspondent à des valeurs impaires des trois premiers carrés.

Si l'on considère $4\rho(m_2)$ comme représentant le nombre des solutions de l'équation $m_2 = x^2 + y^2$, le premier membre de l'équation (c) exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(19). \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est un nombre impair m_2.

On reconnaît immédiatement que les deux formes (18) et (19), eu égard aux restrictions énoncés, ne peuvent convenir qu'à des nombres de l'une des deux formes $8l+3$, $8l+5$. Au besoin on en serait averti par le second membre de la formule (c) qui se réduit à zéro, lorsqu'on suppose $m = 8n \pm 1$. Dans ce cas, en effet, les deux facteurs d, δ sont compris dans la même forme $8l+\alpha$, si $m = 8n+1$, on dans deux formes opposées $8l+\alpha$, $8l-\alpha$, si $m = 8n-1$. Dans l'un et l'autre cas on a

$$(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{d^2-1}{8}},$$

et le second membre de la formule (c) s'évanouit.

Au contraire, lorsque le nombre m est compris dans la formule $8l \pm 3$, l'un des deux facteurs d, δ est compris dans la même formule, et l'autre, dans la formule $8l \pm 1$. Dans ce cas, on a

$$\frac{\delta^2-1}{8} \equiv \frac{d^2-1}{8} + 1 \quad (\text{mod. } 2),$$

et la formule (c) devient

$$(c') \qquad \sum 2\varpi\,(m_1, 2).\, 4\rho(m_2) = 4\sum(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

Le second membre de cette formule est égal à quatre fois l'excès de la somme des diviseurs de m compris dans la formule $8l \pm 3$ sur le nombre de ceux qui sont compris dans la formule $8l \pm 1$. Par conséquent la formule (c') appliquée à l'équation (18) exprime ce théorème:

Le nombre des représentations d'un nombre impair $\mathrm{m} = 8\mathrm{n} \pm 3$ *par la*

somme de trois carrés impairs plus le double d'un quatrième carré pair ou impair, est égal à quatre fois l'excès de la somme des diviseurs $8l \pm 3$ *de* m *sur la somme de ses diviseurs* $8l \pm 1$.

37. Si l'on considère $2\rho(m_2)$ comme exprimant le nombre des représentations de m_2 par la forme $z^2 + 4t^2$, la somme $\sum 2\varpi(m_1, 2).2\rho(m_2)$ exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(20) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2(z^2 + 4t^2),$$

dans lesquelles z est un nombre impair; la formule (c') exprime que le nombre de ces solutions est égal à $2\sum d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}$.

Si $m = 8l + 5$, les deux carrés y^2 et z^2 sont tous deux impairs, dans ce cas l'expression précédente donne le nombre de toutes les solutions de l'équation

$$(21). \qquad 8l + 5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 8t^2.$$

Si $m = 8l + 3$, l'équation

$$(22). \qquad 9l + 3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

exige que l'un des deux carrés y^2, z^2 soit pair et l'autre impair; mais on peut permuter entre eux ces deux carrés, tandis que dans l'équation (20) le carré impair multiplié par 2 doit former le troisième terme. Le nombre des solutions de l'équation (22) est donc double de celui des solutions de l'équation (20); par conséquent il est exprimé par la formule

$$4\sum d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

38. En faisant $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (6) et en ayant égard aux formules suivantes:

$$\operatorname{Cos}\frac{\alpha\pi}{4} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (-1)^{\frac{a-1}{2}} = \left(\frac{-1}{a}\right) = \left(\frac{-1}{m_1}\right)\left(\frac{-1}{\alpha}\right),$$

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}} \operatorname{Cos}\frac{\alpha\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\frac{m_1-1}{2}}\left(\frac{-2}{\alpha}\right),$$

on trouve

$$4\sum\left((-1)^{\frac{m_1-1}{2}}\varpi(m_1, 2)\sum(-1)^{\frac{m_2-1}{2}}(-1)^{\frac{\beta-1}{2}}\operatorname{Cos}\frac{2^i\beta\pi}{4}\right) = \sum\left(d - (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\right)\left(\frac{2}{d}\right)$$

Le facteur Cos $\frac{2^i\beta\pi}{4}$ se réduit à 0, à -1 ou à $+1$, suivant que l'on a $i=1$, $i=2$ ou $i>2$. Par conséquent dans l'équation

$$m = m_1 + 2^i m_2$$

on doit négliger toutes les solutions dans lesquelles $i=1$. De même on doit omettre les solutions dans lesquelles m_1 est de l'une des deux formes $8l+5$ ou $8l+7$, parce que les valeurs correspondantes du facteur $\varpi(m_1, 2)$ s'évanouissent. Enfin on ne doit pas non plus tenir compte des solutions dans lesquelles m_2 serait de la forme $4l+3$, car la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \operatorname{Cos}\left(\frac{2^i\beta\pi}{4}\right) = \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4} \sum(-1)^{\frac{\beta-1}{8}} = \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4}\,\rho(m_2)$$

se réduit alors à zéro; on a donc $(-1)^{\frac{m_2-1}{2}} = 1$.

Si $m = 4n+1$, on ne peut donner à m_1 aucune valeur de la forme $4l+3$, parce qu'alors la différence $m - m_1$ serait de la forme $4l+2$ et l'on aurait $i=1$. D'un autre côté les deux facteurs d, δ vérifient la condition $\frac{d-1}{2} \equiv \frac{\delta-1}{2}$ (mod. 2), par conséquent $(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right) = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{-2}{d}\right)$. Dans ce cas notre formule prend la forme suivante

$$(d) \qquad 4\sum\varpi(m_1, 2).\ \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4}\,\rho(m_2) + \varpi(m, 2) = \sum d\,(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}.$$

Si $m = 4n+3$, le nombre m_1 doit être de la même forme de sorte que $(-1)^{\frac{m_1-1}{2}} = -1$ pour toutes les solutions que nous avons à considérer. D'un autre côté on a $(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = -(-1)^{\frac{d-1}{2}}$; par conséquent notre formule changée de signe, eu égard aux égalités $\left(\frac{2}{d}\right) = (-1)^{\frac{d^2-1}{8}}$, $(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{-2}{d}\right)$, devient

$$(d') \qquad 4\sum\varpi(m_1, 2).\ \operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4}\,\rho(m_2) + \varpi(m, 2) = -d\sum(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}$$

Les deux formules peuvent se réunir en une seule, savoir

$$(2) \qquad 2\varpi(m, 2) + \sum 2\varpi(m_1, 2).\ 4\rho(m_2)\operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4} = 2(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum d(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}$$

Le premier membre se rapporte à toutes les solutions de l'équation

$$m = m_1 + 2^i m_2$$

en nombres impairs et positifs m_1, m_2, et le second, à celles de l'équation $m = d\delta$. Pour interpréter le premier membre, nous distinguerons les diverses valeurs de m relativement au module 8.

39. Soit $m = 8n + 1$. Le nombre m_1 doit être de même forme, par conséquent la différence $m - m_1 = 2^i m_2$ est divisible par 8; on a $i > 2$ et $\operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4} = 1$. En même temps les deux facteurs d, δ vérifient la condition $\frac{d^2-1}{8} = \frac{\delta^2-1}{8}$; la formule (e) devient donc

$$(e') \quad 2\varpi(8l+1, 2) + \sum 2\varpi(m_1, 2)\, 4\rho(m_2) = 2\sum d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} = 2\sum d(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}.$$

Le premier membre de cette formule exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(23) \qquad m = 8l + 1 = x^2 + 2y^2 + 4(z^2 + t^2);$$

car le premier terme $2\varpi(8l+1, 2)$ exprime le nombre de celles dans lesquelles les deux derniers carrés sont nuls, et le second terme, le nombre de toutes les autres solutions. Donc

Le nombre des solutions de l'équation (23) *est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs* 8h ± 1 *de* m *sur la somme de ses diviseurs* 8h ± 3.

Soit $m = 8n + 5$. Le nombre m_1 doit être encore de la forme $8h \pm 1$, et l'on a $i = 2$, $\operatorname{Cos}\frac{2^i\pi}{4} = -1$. Mais en même temps $\varpi(m, 1)$ s'évanouit et les deux facteurs d, δ vérifient la congruence $\frac{d^2-1}{8} \equiv \frac{\delta^2-1}{8} + 1 \pmod{2}$. La formule (e) changée de signe devient donc

$$(e''). \qquad \sum 2\varpi(m_1, 2).\, 4\rho(m_2) = 2\sum d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

Elle exprime ce théorème:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(24). \qquad \mathrm{m} = 8\mathrm{n} + 5 = \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y}^2 + 4(\mathrm{z}^2 + \mathrm{t}^2)$$

est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs de m *compris dans la formule* 8h ± 3 *sur la somme de ceux qui sont de la forme* 8h ± 1.

Soit $m = 8l + 3$. Le nombres m_1 doit être de même forme, de sorte que la différence $m - m_1$ est divisible par 8, on a $i > 2$ et $\operatorname{Cos}\frac{2i\pi}{4} = 1$. On a en même temps $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1$ et $(-1)^{\frac{d^2-1}{8}} = -(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}$;

$$(e'') \quad m = 8n + 3, \; 2\varpi(m_1\, 2) + \sum 2\varpi(m_1, 2)\; 4\rho(m_2) = 2\sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

En considérant $4\rho(m_2)$ comme expriment le nombre des solutions de chacune des deux équations

$$2^{i-2}\, m_2 = z^2 + t^2,\; 2^{i-3}\, m_2 = z^2 + t^2,$$

on deduit de la formule (e'') que:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(25). \qquad m = 8n + 3 = x^2 + 2y^2 + 4(z^2 + t^2),$$

comme celui des solutions de l'équation

$$(26). \qquad m = 8n + 3 = x^2 + 2y^2 + 8(z^2 + t^2),$$

est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs 8h ± 3 *de* m, *sur la somme de ses diviseurs* 8h ± 1.

Soit enfin $m = 8n + 7$. On a $\varpi(m, 2) = 0$, $\frac{d^2 - 1}{8} \equiv \frac{\delta^2 - 1}{8}$ (mod. 2). D'ailleurs m_1 étant de la forme $8l + 3$, la différence $m - m_1$ est de la forme $8h + 4$. On a donc $i = 2$, $\cos\frac{2^i\pi}{4} = -1$; l'équation (e) changée de signe devient donc

$$(e'''') \qquad \sum 2\varpi(m_1, 2)\,.\, 4\rho(m_2) = \sum d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}},$$

et elle exprime le théorème suivant:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(27). \qquad m = 8n + 7 = x^2 + 2y^2 + 4\,(z^2 + t^2)$$

est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs $8h \pm 1$ *de* m *sur la somme de ses diviseurs* $8h \pm 3$.

Nous reviendrons sur les résultats précédents pour en déduire diverses conséquences relatives aux formes quadratiques $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$, $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2$; pour le moment, nous nous bornons aux conséquences immédiates des formules.

40. Si l'on fait $t = \frac{\pi}{2}$ dans la formule (7), le premier membre devient

$$2 \sum \rho(m') \, \rho(m''), \quad (2^\lambda m = 2^\mu m' + 2^\nu m'').$$

Le coefficient de d dans le dernier terme du second membre est, en supposant $\lambda > 0$,

$$\text{Cos}\, \pi + 2\, \text{Cos}\, 2\pi + 4\, \text{Cos}\, 4\pi + \ldots + 2^{\lambda-1}\, \text{Cos}\, 2^{\lambda-1}\, \pi = 2^\lambda - 3.$$

On déduit donc de la formule (7) multipliée par 8.

$$2.\, 4\rho(m) + \sum 4\rho(m')\, 4\rho(m'') = 24\zeta_1(m).$$

Le premier membre exprime le nombre des solutions de l'équation

$$2^\lambda m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \tag{27}$$

pour toute valeur entière et positive de λ. Car le nombre des solutions dans lesquelles les deux premiers carrés satisfont à la double inégalité

$$0 < x^2 + y^2 < 2^\lambda m$$

est exprimé par la somme $\sum 4\rho(m').\, 4\rho(m'')$. Pour obtenir le nombre de toutes les solutions, il faut ajouter le nombre de celles qui satisfont soit à l'équation $x^2 + y^2 = 0$, soit à l'équation $x^2 + y^2 = 2^\lambda m$. Chacun de ces deux nombres est égal à celui des représentations de $2^\lambda m$ par une somme de deux carrés, c'est-à-dire à $4\rho(m)$; par conséquent le terme $2.4\, \rho(m)$ exprime le nombre des solutions de l'équation (27) dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est nulle ou égale à $2^\lambda m$. Notre formule exprime donc ce théorème de Jacobi:

Le nombre des représentations d'un nombre pair 2^λm *par la somme de quatre carrés est égal à vingt quatre fois la somme des diviseurs impairs de ce nombre* 2^λm.

41. En posant $t = \frac{\pi}{4}$ dans la formule (7), on trouve

$$\sum \varpi (m', 2)\, \varpi (m'', 2) = 2^{\lambda} \zeta_1 (m) - \varpi (m, 2) - \sum d\, (-2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{\lambda-1}).$$

ou bien

$$\sum \varpi (m', 2) . \varpi (m'', 2) = 2 \zeta_1 (m) - \varpi (m, 2),$$

suivant que λ est égal à 1 ou supérieur à 1. Quand $\lambda = 2$, le coefficient de d est $-2 = 2^2 - 6$. Quand λ est > 2, la somme $-2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{\lambda-1}$ est égale à $2^{\lambda} - 6$.

On a donc

$$(f) \qquad \varpi (m, 2) + \sum \varpi (m', 2)\, \varpi (m'', 2) = 2 \zeta_1 (m), \text{ si } \lambda = 1,$$

$$(f') \qquad \varpi (m, 2) + \sum \varpi (m', 2)\, \varpi (m'', 2) = 6 \zeta_1 (m), \text{ si } \lambda \text{ est} > 1.$$

La formule $\quad 4\varpi (m, 2) + \sum 2\varpi (m', 2) . 2\varpi (m'', 2)$

exprime le nombre des solutions de l'équation

$$(28). \qquad 2^{\lambda} m = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2t^2;$$

car le premier terme $2 . 2\varpi (m, 2)$ exprime le nombre de celles dans lesquelles on a $x = y = 0$, ou bien $z = t = 0$; et le second terme donne le nombre de celles dans lesquelles le deux sommes $x^2 + 2y^2$, $z^2 + 2t^2$, sont respectivement égales à deux nombres entiers et positifs $2^{\mu} m'$, $2^{\nu} m''$ dont la somme est égale à $2^{\lambda} m$. Les formules (f) et (f') multipliées par 4 expriment donc le théorème suivant :

Le nombre des solutions de l'équation

$$(28). \qquad 2^{\lambda} m = x^2 + y^2 + 2\,(z^2 + t^2)$$

est égal à huit fois la somme des diviseurs de m , *si* $\lambda = 1$, *et à vingt quatre fois cette même somme, si* $\lambda \gtreqless 2$.

42. Lorsqu'on fait $t = \frac{\pi}{4}$ dans l'équation (6), on trouve

$$(g). \quad 2 \sum \left[\sum \sin \frac{2^{\mu} a \pi}{4} . \sum \sin \frac{2^{\nu} b \pi}{4} \right] = (2^{\lambda} - 1)\, \zeta_1 (m) + \sum (\delta - 2^{\lambda} d) \operatorname{Cos} \frac{2^{\lambda} d \pi}{4}.$$

La facteur $\operatorname{Cos} \frac{2^{\lambda} d \pi}{4}$ est indépendant de d; il est nul , si $\lambda = 1$; il est

égal à -1, si $\lambda=2$, et à $+1$ si λ est >2. Dans ce dernier cas le second membre se réduit à zéro. On reconnaît aisément que le premier membre doit s'annuler lorsque λ est >2. Car les solutions de l'équation

$$2^{l+3}\, m = 2^{\mu} m' + 2^{\nu} m'', \quad l \overline{\gtrless} 0,$$

se partagent en trois groupes, suivant que l'on a $\mu = \nu = 0$; $\mu = \nu = 1$; $\mu > 1$. Dans la dernière hypothèse $\sin \dfrac{2^{\mu} a\pi}{4} = 0$. $\sin \dfrac{2\nu b\pi}{4} = 0$. Dans le second groupe où $\mu = \nu = 1$, l'un des deux nombres m', m'' est nécessairement de la forme $4l+3$, de sorte que l'un des deux facteurs

$$\sum \sin \frac{a\pi}{2} = \rho(m'), \quad \sum \sin \frac{b\pi}{2} = \rho\,(m'')$$

se réduit à zéro. Enfin pour les solutions du premier groupe on a

$$\sum \sin \frac{a\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \varpi\,(m', 2), \quad \sum \sin \frac{b\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \varpi\,(m'', 2).$$

Comme dans l'équation $2^{\lambda} m = m' + m''$, lorsque λ est égal ou supérieur à 3, l'un des deux nombres m', m'' est nécessairement de l'une des deux formes $8l+5$ ou $8l+7$, l'un des deux facteurs $\varpi\,(m', 2)$, $\varpi\,(m'', 2)$ est toujours nul.

Il suffit donc d'examiner la formule (9) dans les deux cas où $\lambda = 1$, ou 2.

43. Soit d'abord $\lambda = 1$. La formule (9) devient

$$(g'). \qquad 2 \sum \left[\sum \sin \frac{2\mu a\pi}{4} \cdot \sum \sin \frac{2\nu b\pi}{4} \right] = \zeta_1\,(m).$$

Si dans l'équation $2^{\mu} m' + 2^{\nu} m'' = 2m$, on suppose μ ou $\nu = 1$, on a ν ou $\mu > 1$, de sorte que l'une des deux sommes renfermées entre crochets est égale à zéro. Il suffit donc de considérer le cas où $\mu = \nu = 0$. On a dans ce cas

$$\sum \varpi\,(m', 2)\ \ \varpi\,(m'', 2) = \zeta_1\,(m),$$

comme nous l'avons trouvé plus haut (n.° 32). Cette formule exprime que:

Le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

dans lesquelles x *et* y *ont des valeurs impaires est égal à quatre fois la somme des diviseurs de* m.

Si $\lambda=2$, on a $\cos\frac{2^\lambda\pi}{4}=-1$, et le second membre de la formule (g) se réduit à $6\zeta_1(m)$, puisque $\sum\delta=\sum d=\zeta_1(m)$. Quant au premier membre, il se réduit à zéro lorsqu'on suppose μ ou $\nu>1$. Par conséquent, de toutes les solutions de l'équation

$$4m=2^\mu m'+2^\nu m'',$$

il suffit de considérer celles dans lesquelles on a $\mu=\nu=0$, ou $\mu=\nu=1$. Les termes de la formule (9) qui correspondent à la première hypothèse ont pour somme $\sum\varpi(m',2)\,\varpi(m'',2)$; ceux qui correspondent à l'hypothèse $\mu=\nu=1$ ont pour somme $2\sum\rho(m')\rho(m'')$; par conséquent la formule (g) devient

$$\sum\varpi(m',2)\,.\,\varpi(m'',2)+2\sum\rho(m')\,\rho(m'')=6\zeta_1(m).$$

Le première somme se rapporte aux solutions de l'équation

$$4m=m'+m'',$$

et la deuxième, à celles de l'équation

$$2m=m'+m''.$$

Nous avons vu que $\sum\rho(m')\,\rho(m'')=\zeta_1(m)$, (n° 31) ; par conséquent notre formule peut se réduire à la suivante :

$$\sum 2\varpi(m',2)\,.\,2\varpi(m'',2)=16\zeta_1(m),$$

Le nombre des solutions de l'équation

$$4m=x^2+y^2+2(z^2+t^2)$$

dans lesquelles x *et* y *ont des valeurs impaires, est égal à seize fois la somme des diviseurs de* m.

Ch. VI. *Sur les formes quadratiques*

$$x^2+y^2+2(z^2+t^2),\ x^2+y^2+z^2+2t^2,\ x^2+2y^2+2z^2+2t^2.$$

44. Nous avons obtenu concernant ces formes des résultats que nous allons réunir et compléter au moyen de considérations arithmétiques fort simples. La première forme peut représenter tous les nombres entiers.

Le nombre des représentations d'un nombre impair m par cette forme se déduit du théorème relatif à l'équation (17) du n° 35. Car les solutions de l'équation

$$(1). \qquad m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

se déduisent deux à deux de celles de l'équation

$$(17). \qquad m = p^2 + 4q^2 + 2(z^2 + t^2),$$

en posant alternativement, pour chaque solution de cette dernière équation,

$$x = p, y = 2q, \text{ et } x = 2q, y = p.$$

Le nombre des solutions de la première équation est donc double de celui des solutions de la dernière. Par conséquent (n° 35) :

Le nombre des représentations d'un nombre impair m *par la forme* $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$ *est égal à quatre fois la somme des diviseurs de* m.

Ce théorème et celui de Jacobi concernant l'équation

$$(2) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

sont une conséquence immédiate l'un de l'autre. En effet le nombre des solutions de cette équation qui satisfont à la condition

$$z^2 + t^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

est égal à celui des solutions de l'équation

$$(1). \qquad m = x^2 + y^2 + 2p^2 + 2q^2,$$

car ces solutions se correspondent une à une au moyen des formules

$$z = p + q, \; t = p - q, \; z^2 + t^2 = 2(p^2 + q^2).$$

Or le nombre des solutions de l'équation (2) qui satisfont à la condition énoncée est la moitié du nombre de toutes les solutions; car si nous groupons ensemble toutes les solutions de l'équation (2) dans lesquelles la somme des deux derniers carrés est paire, il suffit de permuter x et y respectivement avec z et t, pour obtenir un nombre égal de solutions dans lesquelles la somme des deux derniers carrés est impaire. Donc

Le nombre des représentations d'un nombre impair m *par la somme de quatre carrés est double de celui des représentations du même nombre* m *par la forme* $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$.

45. Pour un nombre pair $2^\lambda . m$, la théorie de la même forme se déduit des résultats obtenus dans les n° 32, 33, 41, 42. Le théorème du n° 41

donne le nombre de toutes les solutions de cette équation. Le n° 42 détermine le nombre des solutions dans lesquelles x et y sont des nombres impairs; il nous apprend que ce nombre est

$$4\zeta_1(m),\quad 16\zeta_1(m) \text{ ou } 0,$$

suivant que l'on a

$$\lambda = 1,\quad \lambda = 2, \text{ on } \lambda > 2.$$

Le théorème du n° 41 peut aisément se déduire de celui-ci et du théorème démontré plus haut n° 44. D'abord les solutions de l'équation

$$(3). \qquad 2m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

se partagent en deux groupes, celui des solutions où x et y sont impairs et celui des solutions où ces deux nombres sont pairs. Nous venons de dire que le nombre des premières solutions est égal à $4\zeta_1(m)$. D'ailleurs le nombre des solutions dans lesquelles x et y sont pairs est égal à celui des solutions de l'équation (1), c'est-à-dire à $4\zeta_1(m)$ (n° 44). Le nombre de toutes les solutions de l'équation (3) est donc égal à $8\zeta_1(m)$.

De même les solutions de l'équation

$$(4). \qquad 4m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

se partagent en deux groupes, suivant que x et y sont pairs ou impairs. Or le nombre des solutions du premier groupe est égal à celui des solutions de l'équation (3), c'est-à-dire à $8\zeta_1(m)$. Le nombre de celles du second groupe est $16\zeta_1(m)$. Par conséquent le nombre de toutes les solutions de l'équation (4) est égal à $24\zeta_1(m)$.

46. Les deux équations

$$(5). \qquad m = x^2 + p^2 + q^2 + 2t^2,$$

$$(6). \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2.$$

doivent être considérées conjointement. Chacune d'elles est possible pour toute valeur impaire de m. Chaque solution de l'équation (6) donne une solution de l'équation (5) par les formules

$$(A). \qquad 2y = p + q, \qquad 2z = p - q, \qquad 2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2.$$

Mais dans les solutions ainsi obtenues la somme $p^2 + q^2$ est paire, ce qui exige que le premier carré, x^2, soit impair. Inversement toute solu-

tion de l'équation (5) dans laquelle x est impair donne par les formules (A) une solution de l'équation (6).

Le nombre des solutions de l'équation (6) *est égal à celui des solutions de l'équation* (5) *dans lesquelles le premier carré est impair.*

Si dans l'équation (5) on suppose x, p et q impairs, le nombre m est de la forme $8l+3$ ou $8l+5$, suivant que t est pair ou impair. Par conséquent si le nombre m est de la forme $8l \pm 1$, un seul des trois nombres x, p, q est impair. Dans ce cas le nombre total des solutions de l'équation (5) est triple de celui des solutions dans lesquelles le premier carré est impair. Si donc nous désignons avec Liouville par $A(m)$ le nombre des solutions de l'équation (5) et par $B(m)$ celui des solutions de l'équation (6), nous avons entre ces deux nombres la relation $A(8n \pm 1) = 3B(8n \mp 1)$. La relation entre ces deux nombres est plus compliquée lorsque le nombre m est de la forme $8n \pm 3$.

Il faut d'abord partager en deux groupes les solutions de l'équation (5), suivant que les trois nombre x, p, q sont impairs ou qu'un seul d'entre eux est impair. Nous désignons par A' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par A'' le deuxième groupe et le nombre de ses termes. De même nous partageons les solutions de l'équation (6) en deux groupes, suivant que la somme y^2+z^2 est impaire ou paire. Nous désignons par B' le premier groupe ainsi que le nombre de ses termes, et par B'' le second groupe et le nombre de ses termes.

Dans le groupe A', les deux nombres p, q étant impairs, on peut poser

$$(A).\qquad p+q=2y,\qquad p-q=2z,\qquad p^2+q^2=2y^2+2z^2;$$

donc à chaque solution du groupe A' on fait correspondre par les formules (A) une solution de l'équation (6). Cette solution appartient au groupe B', puisque la somme $y^2+z^2=\dfrac{p^2+q^2}{2}$ est impaire. Inversement à toute solution du groupe B', correspond par les formules (A) une solution du groupe A'. On a donc $A'=B'$.

Dans le groupe A'' le nombre des solutions qui commencent par un carré impair est le tiers du nombre total A'', puisque le carré impair peut occuper successivement trois places différentes. Or les formules (A) font correspondre une solution du groupe B'' à chaque solution du groupe A'', commençant par le carré impair; car les deux nombres p et q étant tous

deux pairs, les formules (A) déterminent pour y et z des valeurs entières dont la somme est paire, en vertu de la relation $2y^2 + 2z^2 = p^2 + q^2$. Inversement à toute solution du groupe B'' les formules (A) font correspondre des solutions du groupe A' dans lesquelles les deux carrés p^2 et q^2 sont pairs, et x^2, impair. On a donc $B'' = \frac{1}{3} A''$.

D'ailleurs on a entre les deux nombres B', B'' la relation $B' = 2B''$. Car les trois carrés y^2, z^2, t^2 ne peuvent être, ni tous pairs ni tous impairs, parce que le nombre m serait de la forme $8l + 1$, dans le premier cas, et $8l + 7$ dans le second; par conséquent, parmi les 6 permutations de ces trois earrés, il y en a deux dans lesquelles la somme $y^2 + z^2$ est paire, et quatre dans lesquelles cette somme est impaire. On a donc $B'' : B' = 2:4$, $B' = 2B''$.

En combinant les trois formules obtenues

$$B' = 2B'', \quad B' = A', \quad A'' = 3B''$$

avec les deux relations

$$A' + A'' = A, \quad B' + B'' = B,$$

on trouve

$$B'' = \frac{1}{3} B, \quad B' = \frac{2}{3} B, \quad A'' = B, \quad A' = \frac{2}{3} B = \frac{2}{3} A''$$

$$A' + A'' = A = B\left(1 + \frac{2}{3}\right); \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

Lorsque le nombre des solutions de l'équation (5) sera déterminé, on connaitra le nombre des solutions de l'équation (6) au moyen des deux formules

$$A\,(8l \pm 1) = 3B\,(8l \pm 1), \quad 3A\,(8l \pm 3) = 5B\,(8l \pm 3).$$

47. Le nombre $A(m)$ des solutions de l'équation

$$(5) \qquad m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dépend de la fonction

$$S(m) = \sum d\,(-1)^{\frac{\delta^2 - 1}{8}}, \quad d\delta = m,$$

qui est égale à l'excès de la somme des diviseurs d de m, qui ont pour conjugués dans l'équation $d\delta = m$ des nombres δ de la forme $8l \pm 1$, sur la somme des diviseurs dont les conjugués sont de la forme $8l \pm 3$. Au moyen de cette notation, le théorème du n.° 36 peut s'énoncer de la manière suivante :

Le nombre des solutions de l'équation

$$(6) \qquad 8n \pm 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

dans lesquelles les trois premiers carrés sont impairs est égal à $4S(8n \pm 3)$.

Ce nombre a été désigné plus haut par A' et nous avons trouvé entre ce nombre et le nombre A'' des solutions où un seul des trois carrés x^2, y^2, z^2 est impair, la relation $A'' = \frac{3}{2} A'$. Par conséquent:

Le nombre des solutions de l'équation (6) *dans lesquelles un seul des trois carrés* x^2, y^2, z^2 *est impair, est égal à* $6S\,(8n \pm 3)$.

En réunissant ces deux théorèmes, on obtient le suivant:

Le nombre $A(8n \pm 3)$, *des représentations d'un nombre impair* $8n \pm 3 = m$ *par la somme de trois carrés plus le double d'un quatrième carré est égal à* $10S(8n \pm 3)$, *c'est à dire à* 10 *fois l'excès de la somme des diviseurs* $8l \pm 3$ *de ce nombre* m, *sur la somme de ses diviseurs* $8l \pm 1$.

Soit par exemple $n = 5$. Le théorème énoncé donne $10(5-1) = 40$ pour exprimer le nombre des solutions de l'équation

$$5 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

Ces résultat est facile à vérifier. Les solutions dans lesquelles les trois premiers carrés sont impairs, correspondent à une seule combinaison $x^2 = y^2 = z^2 = t^2 = 1$ des quatre carrés et aux seize combinaisons des signes de leurs racines. On a donc bien $A'(5) = 16 = 4S\,(5)$.

De même les solutions du groupe (A'') dans lesquelles un seul des trois premiers carrés est impair correspondent aux valeurs 0, 1, 4 de ces carrés et à une valeur nulle de t. Les trois premiers carrés offrent six permutations distinctes, lesquelles étant combinées avec les quatre combinaisons de signes des deux carrés différents de zéro font 24 solutions. On a donc bien $A''(5) = 6.S\,(5) = \frac{3}{2} A'\,(5)$; puis en ajoutant ces deux nombres on trove que le nombre $A(5)$ de toutes les solutions est égal à 40.

48. Pour les nombres de la forme $8n \pm 1$, nous avons trouvé (n.º 39) que le nombre des solutions de l'équation

$$(23) \qquad m = 8n + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2t^2,$$

comme celui des solutions de l'équation

$$(27) \qquad m = 8n + 7 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2t^2$$

est égal à $2S(m)$. Or en comparant ces équations avec la suivante

$$8n \pm 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2,$$

on réconnaît aisément que le nombre de leurs solutions n'est que le tiers de celui des solutions de la dernière équation. En effet, dans cette équation un seul des trois nombres x, y, z est impair et les deux autres sont pairs. Le nombre de ses solutions est donc le triple de celui des solutions de l'équation

$$(7) \qquad 8n \pm 1 = x^2 + (2y)^2 + (2z)^2 + 2t^2\,;$$

puisqu'à chaque solution de cette dernière équation correspondent trois solutions de l'équation (5′) qu'on obtient en plaçant successivement le carré impair au premier, au second et au troisième terme. Donc $A(8n \pm 1) = 6S(8n \pm 1)$; c'est-à-dire:

Le nombre des solutions de l'équation

$$(8) \qquad \mathrm{m} = 8\mathrm{n} \pm 1 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + 2t^2$$

est égal à si x fois l'excès de la somme des diviseurs $8l \pm 1$ *de* m *sur la somme de ses diviseurs* $8l \pm 3$.

Au moyen de ce théorème et de celui du n° 37 on obtient l'expression du nombre $B(m)$ au moyen de la somme $S(m)$, savoir:

$$B(8n \pm 1) = 2S(8n \pm 1),\quad B(8n \pm 3) = 6S(8n \pm 3);\quad B(m) = 2\left(2 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m).$$

49. On obtient ensuite au moyen des expressions précédentes les nombres des solutions des équations (5) et (6), lorsque le nombre impair m est remplacé par le nombre pair $2^\alpha m$. D'abord dans l'équation

$$(6') \qquad 2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

le nombre x doit être pair. Posant donc $x = 2x_1$ et divisant par 2, on trouve

$$(5') \qquad 2^{\alpha-1} m = 2x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

On conclut de là que, pour toute valeur entière et positive de l'exposant α, on a $B(2^\alpha m) = A(2^{\alpha-1} m)$; de sorte qu'il nous suffit de déterminer $A(2^\alpha m)$, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$(9) \qquad 2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

Pour la determination de ce nombre il faut partager en deux groupes les solutions de cette équation, suivant que les trois premiers carrés sont tous pairs ou qu'un seul est pair, tandis que les deux autres sont impairs. Désignons par A′, A″ les nombres des solutions comprises respectivement dans ces deux groupes. Si α est supérieur à 1, le nombre t est pair dans le premier groupe, de sorte que les solutions de ce groupe se ramènent à celles de l'équation

$$2^{\alpha-2}\, m = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2t_1^2.$$

On a donc $A'(2^\alpha m) = A(2^{\alpha-2} m)$, en supposant $\alpha > 1$. Si au contraire $\alpha = 1$, le nombre t est impair et les solutions du groupe $A'(m)$ ce ramènent à celles de l'équation

$$m = t^2 + 2(m_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$$

de sorte que l'on a

$$A'(2m) = B(m) = 2\left(2 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m).$$

Quant aux solutions du groupe A″, leur nombre est triple de celui des solutions de l'équation

$$(10) \qquad 2^\alpha m = p^2 + q^2 + 4z^2 + 2t^2,$$

dans laquelle on désigne par p, q deux nombres impairs. En effet dans le groupe A″, comme dans l'équation (10) un seul des trois premiers carrés est pairs et les deux autres sont impairs; mais le carré pair est fixé au troisiéme terme dans l'équation (10), tandis qu'il peut former l'un quelconque des trois premiers termes dans les solutions du groupe A″. On a donc, pour toute valeur entière et positive de l'exposant,

$$A''(2^\alpha m) = 3C(2^\alpha m),$$

en désignant par $C(2^\alpha m)$ le nombre des solutions de l'équation (10).
En réunissant les résultats obtenus, nous trouvons les deux formules

$$(\alpha) \qquad A(2m) = 2\left(2 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m) + 3C(2m),$$

$$(\beta) \qquad A(2^\alpha m) = A(2^{\alpha-2} m) + 3C(2^\alpha m).$$

50. On détermine aisément les nombres $C(2m)$ et $C(2^\alpha m)$. Car les nombres p, q étant impairs dans l'équation (10), on peut poser

$$(A) \qquad p+q = 2x,\; p-q = 2y,\; p^2+q^2 = 2(x^2+y^2),$$

et par ces formules l'équation (10) se ramène à la suivante

$$2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + t^2 + 2z^2,$$

dans laquelle les deux nombres x, y doivent former une somme impaire. Si α est >1, le nombre t doit être aussi impair, de sorte qu'un seul des trois premiers carrés est pair, comme dans l'équation

$$(10') \qquad 2^{\alpha-1}m = p^2 + q^2 + 4z^2 + 2t^2,$$

mais le carré pair peut former l'un quelconque des deux premiers termes, tandis que dans la dernière équation il est fixé au troisième terme. Le nombre $C(2^{\alpha}m)$ des solutions de l'avant dernière équation est donc le double du nombre $C(2^{\alpha-1}m)$ de la dernière, On a donc

$$C(2^{\alpha}m) = 2C\,(2^{\alpha-1}m) = 4\,C(2^{\alpha-2}m) = \ldots = 2^{\alpha-1}\,C(2m),$$

Quand $\alpha = 1$, l'équation (10) se ramène à la suivante

$$m = x^2 + y^2 + t^2 + 2z^2, \quad x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{2},$$

Le nombre t doit être pair, de sorte qu'un seul des trois premiers carrés est impair, comme dans l'équation

$$m = x^2 + 4\,(y^2 + z^2) + 2t^2;$$

mais le carré impair peut former l'un quelconque des deux premiers, termes dans l'équation précédente, tandis que, dans celle-ci, il est fixé au premier terme. Le nombre $C(2m)$ est donc le double du nombre des solutions de la dernière équation. Or nous avons trouvé (n° 39) que ce dernier nombre est égal à $2S(m)$. On a donc

$$C(2m) = 4\,S(m), \quad A(2m) = 2\left(8 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right) S(m).$$

Au moyen de ces formules et de la formule (β), nous pouvons déterminer $A(2^{\alpha}m)$ pour une valeur quelconque de l'exposant α. D'abord on déduit de la formule (β), en y remplaçant $C(2^{\alpha}m)$ par $2^{\alpha-1}\,C(2m) = 2^{\alpha+1}S(m)$, la suite d'équations

$$A(2^{\alpha}m) = A(2^{\alpha-2}m) + 3.2^{\alpha+1}\,S(m)$$

$$A(2^{\alpha-2}m) = A(2^{\alpha-4}m) + 3.2^{\alpha-1}\,S(m)$$

$$A(2^{\alpha-4}m) = A(2^{\alpha-6}m) + 3.2^{\alpha-4}\,S(m)$$

. . . .

qui se termine par l'équation

$$A(2^3 m) = A(2m) + 3.2^4 \, S(m), \text{ si } \alpha \text{ est impair}$$

et par l'équation

$$A(4m) = A(m) + 3.2^2 S(m), \quad \text{si } \alpha \text{ est pair.}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, on trouve

1° Si α est impair et > 1,

$$A(2^\alpha m) = A(2m) + (2^{\alpha+2} - 2^3)\, 2S(m) = 2(2^{\alpha+2} - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}})\, S(m).$$

2° Si α est pair,

$$A\,(2^\alpha m) = A(m) + (2^{\alpha+2} - 2^2)\, 2S(m).$$

Or nous avons trouvé n° 47 et 48 que le nombre $A(m)$ est égal à 10 $S(m)$ ou à 6 $S(m)$, suivant que m est de la forme $8l \pm 3$, ou de la forme $8l \pm 1$. On peut réunir ces deux résultats dans la formule unique

$$A(m) = 2\,(2^2 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}})\; S(m).$$

On a donc pour toute valeur paire ou impaire de α

$$A(2^\alpha m) = 2\,(2^{\alpha+2} - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}})\; S(m).$$

Quoique cette formule ait été démontrée en supposant $\alpha > 1$, on reconnait par les exprsssions précédentes de $A(2m)$ et de $A(m)$, qu'elle est encore exacte lorsqu'on suppose $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$.

SUR TROIS THÉORÈMES DE GAUSS

(Extrait d'une lettre adressée par le

P. THÉOPHILE PEPIN S. J.

à B. BONCOMPAGNI).

. . . .

Quant au premier théorème de Gauss sur le *caractère cubique* du nombre 2 relativement à un nombre premier $3n + 1$, je ne l'ai jamais rencontré cité que comme cas particulier d'un théorème plus général de Jacobi. Je ne pense pas qu'il ait jamais été publié par Gauss; mais il se trouve peut-être dans le second volume des oeuvres complètes, où se trouvent réunis tous les travaux publiés ou inédits de Gauss, relatifs à la théorie des nombres. Ce théorème de Gauss n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que l'on trouve dans la lettre écrite le 5 août 1827 par Jacobi à Legendre, lettre qui se trouve dans la correspondance de Jacobi et de Legendre, publiée d'abord par M.r Borchard dans son journal et reproduite dans le *Bulletin des sciences Mathèmatiques* etc. rédigé par M. Darboux etc., tome VIII, p. 297 et t. IX, p. 38, 51, 126. Le théorème de Jacobi dont je parle se trouve dans la première lettre (t. VIII, p. 297).

« Etant donné un nombre premier p de la forme $6n + 1$, un autre nombre premier quelconque q sera résidu cubique de p toutes les fois que $4p$ sera de l'une des deux formes $L^2 + 27q^2M^2$, $q^2L^2 + 27M^2$.

Cependant il faut exclure la seconde forme dans le cas de $q = 2$ et $q = 3$. »

C'est-à-dire que si $q = 2$ il faut se borner à la première forme et dire que 2 est toujours résidu cubique de p si $4p = L^2 + 27.4M^2$. Le nombre L doit être pair; posons donc $L = 2x$ et $M = y$; nous avons $p = x^2 + 27y^2$. Ainsi 2 est résidu cubique de p toutes les fois que $p = x^2 + 27y^2$, ce qui est le théorème énoncé dans la lettre de Gauss. La lettre de Jacobi renferme encore d'autres théorèmes sur les résidus cubiques. Le *Bulletin* présente une faute d'impression; à la page citée 297, l. 20, au lieu de $(qx + m)^2 + 27M^2$, il faut lire $(qx + mM)^2 + 27M^2$. Ces divers théorèmes ont été publiés par Jacobi dans le Journal de Crelle, dans son Mémoire : *De residuis cubicis commentatio numerosa*, mais sans démonstration. Ces théorèmes, et avec eux celui de Gauss, ont été démontrés par Lebesgue dans la partie de ses *Recherches sur les nombres* consacrée aux résidus cubiques (Journal de Liouville, 1840). Ces théorèmes sont aussi démontrés dans mon Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus de puissances (n.° 12 à 29).

Le second théorème, relatif au caractère biquadratique du nombre 2 relativement à un nombre premier $p = a^2 + b^2$ a été complété par Gauss et publié

par lui dans ses deux célèbres Mémoires sur les résidus biquadratiques, qui ont paru dans les Mémoires de Goettingue en 1827, et qui se trouvent vers le commencement du second volume des oeuvres complètes. A la fin du premier Mémoire il est énoncé de la manière suivante:

« Le nombre 2 appartient au groupe A, B, C ou D suivant que $\frac{1}{2}b$ est de » la forme $4l$, $4l+1$, $4l+2$ ou $4l+3$ ».

Le nombre b est la racine du carré pair dans l'équation $p=a^2+b^2$, A désigne le groupe des résidus biquadratiques, C celui des résidus quadratiques qui ne sont pas résidus biquadratiques, B et D celui du non-résidus quadratiques. Si donc 2 est résidu biquadratiques de p on a $\frac{1}{2}b=4y$, de sorte qu'en posant $a=x$, on a $p=x^2+64y^2$, ce qui est le second théorème énoncé dans la lettre à Sophie Germain.

Le même théorème est démontré et énoncé sous un autre forme dans le second Mémoire sur les résidus biquadratiques (Werke, etc., t. II, p. 96).

Lebesgue a démontré ce théorème et un grand nombre d'autres dans le Mémoire cité (Recherches sur les nombres), dans la quatrième partie sur les résidus biquadratiques.

Dirichlet a donné une démonstration très-simple du théorème de Gauss dans sa lettre à M. Stern, dont la traduction française a paru en 1859 dans le Journal de M. Liouville (2.ème série, t. 4, p. 367). Le théorème de Gauss et la démonstration de Dirichlet sont mentionnés au n.° 42 de mon Mémoire sur les Lois de réciprocité.

Quant au troisième théorème énoncé dans la lettre à Sophie Germain, c'est un Lemme dont Gauss se sert pour sa troisième démonstration de la loi de réciprocité qui a lieu dans la théorie des résidus quadratiques. Il a été publié en 1817 par Gauss dans son Mémoire intitulé: « Theorematis fundamen» talis in doctrinâ de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes » novæ », Mémoire qui se trouve vers le commencement du second volume des oeuvres complètes, et dont la première publication a eu lieu, je crois, dans les Mémoires de Goettingue; mais je ne suis pas certain de ce dernier point.

Ce Lemme et la troisième démonstration de Gauss sont exposés dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet.* Je cite la deuxième édition, de 1871. Le lemme est démontré au §. 43 (p. 94); il suffit de lire cette démonstration pour reconnaitre que Gauss avait raison de dire à Sophie Germain qu' elle pourrait y parvenir sans trop de peine. Cette partie de la lettre de Gauss n'est pas très bien lisible; il faut la lire de la manière suivante:

A . . . 1, 2, 3, . . . $\frac{1}{2}(p-1)$

B . . . . $\frac{1}{2}(p+1)$, $\frac{1}{2}(p+3)$, $\frac{1}{2}(p+5)$, . . . $p-1$.

Car le groupe A doit comprendre les nombres compris entre 0 et $\frac{1}{2}p$, et le groupe B ceux qui sont compris entre $\frac{1}{2}p$ et p, exclusivement.

Ce Lemme de Gauss est cité par M. Liouville, mais sous une forme un peu différente, dans sa note: sur la loi de reciprocité dans la théorie des residus quadratiques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 24, p. 577). – Monsieur Liouville désigne par α l'un quelconque des nombres du groupe A et il dit: « il suffit . . . de se rappeler le lemme de Gauss rela-
» tif aux produits αq réduits à leurs résidus minima, positifs ou négatifs par
» rapport au module p. En effet, soit μ le nombre de ces résidus qui por-
» tent le signe – »; M. Gauss prouve que

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu} \text{ »},$$

C'est à dire que q est résidu ou non-résidu quadratique de p suivant que μ est pair ou impair. Or ceux des produits dont les résidus minima absolus, compris entre $-\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2}p$ sont affectés du signe $-p$ sont précisément ceux dont les résidus positifs appartiennent au groupe B. Le nombre μ est donc égal au nombre β qui figure dans la lettre à Sophie Germain. Le nombre q est donc résidu quadratique de p si β est pair, et non-résidu si β est impair.

Il me semble que M. Serret a reproduit dans le second volume de son traité d'Algèbre supérieure la troisième démonstration de Gauss, pour le théorème fondamental, et par conséquent le *lemme précédent* sur lequel cette démonstration repose (1).

Puisqu'il me reste encore un peu de place j'indiquerai la manière probable dont Gauss a été amené à trouver son premier théorème sur le caractère cubique du nombre (2).

Gauss a trouvé la relation

$$(1) \qquad 4p = (6n - 3(n' + n'' - 1) + 1)^2 + 27(n' - n'')^2,$$

où n, n' n'' sont trois nombres entiers qui satisfont à l'équation

$$(2) \qquad 1 + n + n' + n'' = \frac{p-1}{3}.$$

Si l'on compare l'équation précédente avec la suivante

$$(3) \qquad 4p = A^2 + 27B^2,$$

on voit que l'une des deux racines du nombre A^2 doit vérifier l'équation

(1) SERRET. Algèbre supérieure, 4^{me} édition, t. 2, p. 102.

$$6n - 3(n' + n'' - 1) + 1 = A,$$

la quelle ajoutée à l'équation

$$3n + 3(n' + n'') = p - 1,$$

déduite de l'équation (2), donne

$$(4) \qquad 9n = A + p - 8.$$

Or si l'on designe par α, α' deux résidus cubiques de p, n exprime le nombre des solutions de l'équation $\alpha + \alpha' = -1 + Mp$. Les solutions où les valeurs de α et de α' sont inégales sont en nombre pair, puisque chacune de ces solutions est accompagnée de celle ou ces deux valeurs sont permutées. Or si l'on suppose $\alpha = \alpha' = K$, le nombre K est la solution unique de la congruence $2K \equiv -1 \pmod{p}$ et de plus, il doit être résidu cubique. Puisque -1 est aussi résidu cubique, cette solution unique n'est possible que si 2 est aussi résidu cubique de p. Le nombre n est donc impair si 2 est résidu cubique de p; il est pair si 2 est non residu cubique. Or on déduit de l'équation (4) que n est impair ou pair suivant que A est pair ou impair. Dans le premier cas on peut poser $A = 2x$, $B = 2y$ et l'on a le théorème de Gauss que 2 est résidu cubique de p toutes les fois que p est de la forme $p = x^2 + 27y^2$.

SUR QUELQUES CONGRUENCES BINOMES

EXTRAITS DE LETTRES ADRESSÉES

PAR LE P. TH.LE PEPIN, S. J.

À D. B. BONCOMPAGNI

I.

Extrait d'une lettre en date de « Lyon 17 mars 1883. »

. . . .

. . . . . . Vous me demandez en outre, si l'on peut affirmer que:

« Si c est un nombre premier tel que $x^2 - k$ soit divisible par c, $k^{\frac{c-1}{2}} - 1$ sera divisible aussi par c, et que si cette condition est remplie il existera un nombre x (moindre que $\frac{1}{2}c$) tel que $x^2 - k$, soit divisible par c. »

Cette proposition est parfaitement exacte. La première partie est une conséquence immédiate du théorème de Fermat; car si l'on élève à la puissance $\left(\frac{c-1}{2}\right)^{me}$ les deux membres de la congruence

$$x^2 \equiv k \pmod{c},$$

on trouve

$$k^{\frac{c-1}{2}} \equiv x^{2\frac{k-1}{2}} \equiv x^{c-1} \equiv 1 \pmod{c},$$

Inversement, si cette condition est remplie et qu'on désigne par b une racine primitive du nombre c, l'indice du nombre k est un nombre pair 2μ, puisque c'est là le caractère des résidus quadratiques. On aura donc

$$b^{2\mu} \equiv k \pmod{c},$$

et l'on vérifiera la congruence

$$x^2 \equiv k \pmod{c},$$

en prenant $x = b^{\mu}$. C'est de cette manière que l'on résout la congruence

$$x^2 \equiv k \pmod{c}$$

lorsqu'on possède le *Canon Arithmeticus* de Jacobi, et que le nombre premier c ne dépasse pas les limites des tables renfermées dans cet ouvrage.

De même si k est résidu biquadratique, son *indice* sera multiple de 4, de sorte qu'en désignant par b la base du système *d' indices* pour le nombre premier c, on aura

$$b^{4\mu} \equiv k \pmod{c}.$$

On cherche dans la table d'indices, l'indice qui correspond au nombre donné k; si ce nombre et effectivement résidu biquadratique, comme on le suppose, cet indice sera un multiple de 4, 4μ; en le divisant par 4 et prenant dans la seconde table les quatre nombres qui correspondent aux indices

$$\mu,\ \mu + \frac{c-1}{4},\ \mu + 2\frac{c-1}{4},\ \mu + 3\frac{c-1}{4},$$

on aura les quatre racines de la congruence

$$x^4 \equiv k \pmod{c}.$$

II.

Extrait d'une lettre en date de « Lyon 28 février 1885 ».

. . . . , ...

La méthode la plus simple pour résoudre les problèmes renfermés dans la deuxième question, et en général toutes les congruences binômes, est la méthode des indices, lorsqu' on a les Tables d' indices (*Canon arithmeticus* de Jacobi). Proposons nous par exemple de résoudre la congruence

$$x^3 \equiv 2 \pmod{157}.$$

Dans l'une des deux tables relatives au nombre premier 157, nous prendrons l'indice du nombre 2; cet indice est multiple de 3, puisque 2 est résidu cubique de 157. Soit donc $3h$ cet indice. Après l'avoir divisé par 3, nous cherchons dans l'autre table les nombres qui correspondent aux indices

$$h\,,\quad h+52\,,\quad h+104.$$

Ces trois nombres sont les trois racines de la congruence proposée.

En l'absence des tables d'indices, la méthode qui me semble la plus commode, mais qui n'est pas applicable dans tous les cas, est celle que Legendre a donnée dans le deuxième §. de la quatrième partie de sa *Théorie des nombres*, pour la solution du problème : « Trouver les valeurs de x qui » donnent une valeur entière au rapport $\frac{x^n - b}{a}$ ».

Dans le cas actuel on a $n=3$, $b=2$; $a=157$. Il faut d' abord chercher le plus petit exposant m qui vérifie la condition $2^m \equiv \pm 1 \pmod{157}$. On trouve $m=26$, $2^{26} \equiv -1 \pmod{157}$. On résout ensuite la congruence $3\pi \equiv 1 \pmod{26}$, qui donne $\pi = 9$. On obtient une racine de la congruence proposée en prenant

$$x \equiv -2^9 \equiv -41 \pmod{157}.$$

On trouve ensuite les deux autres racines en multipliant -41 par les deux racines de la congruence

$$\frac{y^3-1}{y-1} = y^2 + y + 1 \equiv 0 \pmod{157}.$$

Pour trouver ces racines, au lieu d' employer la méthode générale, exposée par Legendre à l'endroit cité, pour l'équation $\frac{x^n-1}{a} = e$, il vaut mieux re-

courir aux deux formules

$$y \equiv \frac{\pm s - 1}{2},\ s^2 + 3 \equiv 0 \pmod{157}$$

car la décomposition $157 = 7^2 + 3\,(6)^2$ donne immédiatement

$$s \equiv \pm \tfrac{7}{6} \equiv \pm 25.$$

Les racines de la congruence $y^3 - 1 \equiv 0 \pmod{157}$ sont donc 1, 12 et -13. Les trois racines de la congruence proposée sont donc

$$x = -41,\ -41.12 \equiv -21,\ 41.13 \equiv 62.$$

Cette méthode est applicable à tous les nombres premiers ci-dessus indiqués, à l'exception de 307. Pour ce dernier module le plus petit exposant entier qui vérifie la condition $2^m \equiv \pm 1 \pmod{307}$ est $m = 51$, qui donne $2^{51} \equiv -1 \pmod{307}$. Comme 51 est multiple de 3, l'équation $3\pi - 51\varphi = 1$ est impossible.

La congruence $y^3 - 1 \equiv 0 \pmod{307}$ se résout au moyen des deux formules

$$y \equiv \frac{\pm s - 1}{2},\ s \equiv \sqrt{-3} \equiv \pm \frac{8}{9} \pmod{307},$$

qui donne $s = \pm 35$, $y = 17$, -18. Les trois racines de la congruence $y^3 - 1 \equiv 0 \pmod{307}$ sont donc

$$y = 1,\ 17,\ -18.$$

Il suffit donc de trouver une racine de la congruence $x^3 \equiv 2 \pmod{307}$; en multipliant cette racine par 17 et -18 on obtient les deux autres racines. Or pour trouver une racine nous essaierons la base $t = 10$ qui est non-résidu cubique et nous formerons les résidus des cubes, t^3, t^6, t^9...

Nous trouvons ainsi

$$t^3 = 1000 \equiv 79,\ t^6 \equiv 101,\ t^9 \equiv -3,\ t^{12} \equiv 70,$$

$$t^{15} \equiv 4,\ t^{18} \equiv 9,\ t^{21} \equiv 97,\ t^{24} \equiv -12,\ t^{27} \equiv -27$$

$$t^{24} \times t^{27} = t^{51} \equiv 17,\ t^{102} \equiv -18.$$

Ces résultats suffisent, car en comparant $t^{102} \equiv -18$ et $t^{18} \equiv 9$, nous voyons que le quotient t^{84} se réduit à -2, suivant le module 307. En divisant l'indice 84 par 3, on trouve 28; par conséquent on vérifie la congruence proposée $x^3 \equiv 2 \pmod{307}$ en prenant $x \equiv -t^{28} \equiv 270 \equiv -37$.

On vérifie effectivement que le quotient

$$\frac{(-37)^3 - 2}{307}$$

est un nombre entier. Les deux autres solutions s'obtiennent en multipliant -37 par 17 et par -18; on trouve ainsi $x = -15$ et $x = 52$.

III.

Extrait d'une lettre en date de « Lyon 14 mars 1885 ».

. . . .

. . . Soit p un nombre premier pour lequel on propose de résoudre la congruence

$$(1)\quad x^3 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Si le nombre p est renfermé dans les limites des tables de Jacobi, on emploie la méthode suivante.

D'abord on déduit de la formule (1) la congruence

$$(2)\quad 3.\ \text{ind.}\ x \equiv \text{ind.}\ 2.\ (\text{mod.}\ p-1)$$

où l'on désigne par ind. x et ind. 2. l'indice du nombre x et l'indice du nombre 2. Dans les tables de Jacobi, l'indice de 2 est toujours dans la table « indices » dans la quatrième case de la deuxième ligne, dont les deux premières cases sont vides; la troisième case renferme le nombre $p-1$, qui est l'indice de 1, et la quatrième case renferme l'indice du nombre 2. Lorsque $p-1$ est divisible par 3 et que 2 est résidu cubique de p, l'indice du nombre 2 est un multiple de 3. C'est pourquoi je le désigne par $3h$. Ce nombre $3h$ se trouve dans la quatrième case de la deuxième ligne de la table « indices », immédiatement au dessous du nombre 2, dont il est l'indice.

Dans la Table relative au nombre 433, je prends dans la 4^{me} case de la 2^{me} ligne, le nombre $258 = 3h$, qui est l'indice de 2; je le divise par 3 et je trouve $h = 86$.

On déduit de la congruence (2), en posant ind. $2 = 3h$,

$$(3)\quad \begin{cases} \text{ind}.x \equiv \dfrac{3h + l\,(p-1)}{3}\ (\text{mod.}\ p-1). \\ \text{ind}x \equiv h + l.\ \dfrac{p-1}{3},\ (\text{mod.}\ p-1). \end{cases}$$

Car on en déduit d'abord

$$\text{ind}x \equiv h \left(\text{mod.}\ \frac{p-1}{3}\right),\ \text{ind.}\ x = h + l\,\frac{p-1}{3},$$

et l'on donne à l les valeurs 0, 1, 2. qui déterminent pour l'indice de x trois valeurs non équivalentes entre elles suivant le module $(p-1)$; c'est ce qu'on indique par la formule

$$\operatorname{ind} x \equiv h + l.\ \frac{(p-1)}{3}\ (\text{mod. } p-1).$$

Pour $p = 433$, on a $h = 86$, $\frac{p-1}{3} = 144$. Les trois valeurs de l'indice de x déterminées par la formule précédente sont donc

86, 230 et 374

Je passe maintenant à la table « Numeri » relative au nombre premier 433, afin d'y chercher les nombres qui correspondent aux trois indices précédents, et qui sont les trois racines de la congruence proposée.

Pour l'indice 86, je prends dans la table « Numeri » la dixième ligne, dont la première case renferme le nombre 8 des dizaines de l'indice; je suis cette ligne jusqu'à la huitième colonne, qui porte en tête le chiffre 6 des unités. Le nombre 400 situé à l'intersection de cette 10^me^ ligne et de cette 8^me^ colonne, est le nombre qui correspond à l'indice 86.

Pour 230, je vais à la ligne dont la première case, dans la colonne I, renferme le nombre des dizaines 23; je suis cette ligne jusqu'à la deuxième case, située dans la colonne qui porte en tête le chiffre 0 des unités; le nombre 394 situé dans cette ligne et cette colonne, est le nombre qui correspond à l'indice 330.

Enfin pour 374, je prends la ligne marquée du nombre 37 dans sa première case; je suis cette ligne jusqu'à la 6^me^ case, dans la 6^e^ colonne, portant en tête le nombre 4 des unités; je trouve le nombre 72 qui correspond à l'indice 374.

Ainsi les trois racines de la congruence proposée sont, 72, $394 \equiv -39$, $490 \equiv -33$ (mod. 433). Ce qui veut dire que tous les nombres entiers renfermés dans les trois formules,

$$433\,n + 72,\quad 433\,n - 39,\quad 433\,n - 33.$$

jouissent de la propriété de donner des valeurs entières à l'expression

$$\frac{x^3-2}{433}.$$

Dans la table relative au nombre 433, comme dans les tables relatives à tous les nombres pour lesquels Jacobi a construit son *Canon arithmeticus*, la base du système d'indices se trouve dans la table « Numeri » à la deuxième case de la 3^ème^ colonne, immédiatement au dessous du nombre 1. Dans cette case je trouve le nombre 10; j'en conclus que 10 est la base du système d'indices de Jacobi, pour le module 433, puisqu'il a l'unité pour indice.

Il y a la plus grande analogie entre les indices et les logarithmes. Cette analogie vient de ce que l'indice α d'un nombre a dans un système dont la

base est t, et le module, un nombre premier p, est défini par la congruence binôme

$$t^{\text{ind}.a} = t^{\alpha} \equiv a \pmod{p},$$

de même que le logarithme vulgaire du nombre a est défini par l'équation binôme

$$(10)^{\log.a} = a$$

Si l'on veut résoudre par logarithme une équation binôme

$$x^n = \text{A},$$

on calcule le logarithme de a par la formule

$$n \log x = \log \text{A}$$

De même si l'on veut résoudre la congruence binôme

$$(1) \qquad x^n \equiv \text{A} \pmod{p}$$

au moyen des Tables d'indices, on déduit de la congruence proposée, la congruence relative aux indices

$$(2) \qquad n.\text{ind}.x \equiv \text{ind}.\text{A}. \pmod{p-1}.$$

Si n est premier avec $p-1$, la congruence (2) admet toujours une racine, et une seule. Dans ce cas la congruence proposée, (1), admet une racine, et une seule. Si n est diviseur de $p-1$, et que l'indice de A ne soit pas divisible par n, les congruences (2) et (1) sont impossibles; si, dans le même cas où n est diviseur de $p-1$, le nombre A est résidu de puissance $n^{\text{ième}}$, son indice est un multiple de n que je désigne par nh. Dans ce cas on deduit de la formule (2)

$$\text{ind}x \equiv h \left(\text{mod.}\ \frac{p-1}{n}\right); \ \text{ind}.x = h + l.\ \frac{p-1}{n},$$

en désignant par l un nombre entier quelconque.

Mais comme deux indices dont la différence est divisible par $(p-1)$ sont équivalents, on se contentera de donner à l les valeurs 0, 1, 2, ... $n-1$, qui donnent à l'indice de x des valeurs non équivalentes suivant le module $(p-1)$. C'est ce qu'on exprime au moyen de la congruence

$$(3) \qquad \text{ind}x \equiv h + l.\ \frac{p-1}{n} \ (\text{mod}.p-1).$$

On conclut de là que, dans le cas où, n étant diviseur de $p-1$, le nombre A est résidu de puissance $n^{\text{ième}}$ relativement au module p, la congruence (1) admet n racines distinctes, c'est-à-dire n racines non équivalentes suivant le module p.

Il me reste à démontrer comment la congruence (2) est une conséquence de la congruence (1), en vertu de la définition des indices.

Les indices du nombre A et du nombre x, dans un système dont la base est t et le module, une puissance d'un nombre premier p, sont les exposants entiers qui vérifient respectivement les deux congruences

$$t^{\text{ind.A}} \equiv \text{A},\ t^{\text{ind.}x} \equiv x \pmod{p^{\varpi} = \text{M}}.$$

En substituant ces expressions de x et de A dans la congruence proposée

$$x^n \equiv \text{A} \pmod{p^{\varpi} = \text{M}},$$

on a

$$t^{n.\text{ind}x} \equiv x \quad t^{\text{ind.A}}$$

$$(4) \qquad t^{(n\text{ind.}x - \text{ind.A})} \equiv 1 \pmod{\text{M}}.$$

Or le nombre t étant une racine primitive pour le module $\text{M} = p^{\omega}$, les seules puissances de t qui soient équivalentes à l'unité suivant le module M sont celles dont l'exposant est un multiple du nombre $\varphi(\text{M}) = p^{\omega}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. La formule (4) entraine donc la congruence

$$n\text{ind}\,x \equiv \text{ind}\text{A} \left(\text{mod}\varphi(\text{M}) = p^{\varpi}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right).$$

Lorsque $\varpi = 1$, on a $\text{M} = p$, $\varphi(\text{M}) = p - 1$. Dans ce cas, la congruence que nous venons d'obtenir, est précisement la congruence (2) qu'il s'agissait de démontrer.

IV.

EXTRAIT D'UNE LETTRE EN DATE DE « LYON 20 MARS 1885 ».

. . . .

. . . . Vous me demandez ensuite « quelles seraient les formules générales qui pourraient donner pour la même valeur de h, toutes les autres racines de la même congruence ($x^3 \equiv 2 \pmod{p}$), c'est-à-dire toutes les autres valeurs de x qui rendraient entier $\frac{x^3 - 2}{p}$ pour la même valeur de p. »

On suppose 2 résidu cubique de p et l'on désigne par $3h$ l'indice de 2. J'ai démontré dans ma lettre du 14 mars que les indices des trois racines de la congruence

$$(1) \qquad x^3 - 2 \equiv 0 \pmod{p}$$

sont les trois nombres

$$h,\ h + \frac{p-1}{3},\ h + 2\frac{p-1}{3}.$$

On obtient ensuite les racines cherchées en prenant dans la Table « Numeri »

relative au module p, les trois nombres x', x'', x''' qui correspondent à ces trois indices. Toutes les valeurs de x comprises dans les trois formules

$$x = mp + x', \ x = mp + x'', \ x = mp + x''',$$

dans lesquelles on désigne par m un nombre entier quelconque, rendent entier le quotient $\frac{x^3 - 2}{p}$. Je ne connais pas d'autres formules générales pour trouver les racines de la congruence (1) au moyen des tables d'indices.

Je ferai seulement remarquer que

$$0, \frac{p-1}{3}, \quad 2\frac{p-1}{3}$$

sont les indices des trois racines de la congruence

$$(2) \qquad y^3 - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p).$$

Les formules précédentes montrent que les indices des trois racines de la congruence (1) se déduisent de l'indice h de l'une d'elles, en lui ajoutant les indices des trois racines cubiques de l'unité. En passant des indices aux nombres, on obtient ce théorème: « Les trois racines de la congruence (1) se déduisent de l'une d'elles en la multipliant par les trois racines de la congruence (2). » C'est ce théorème que j'ai appliqué dans les solutions que j'ai eu l'honneur de vous adresser. On voit du reste aisément l'analogie de ce théorème avec le suivant: « Les trois racines de l'équation $x^3 - 2 = 0$ se déduisent de l'une d'elles en la multipliant par les trois racines cubiques de l'unité. »

V.

EXTRAIT D'UNE LETTRE EN DATE DE « LYON 29 MARS 1885 ».

Vous me demandez ensuite, quelle est la manière la plus simple de démontrer 1° qu'en désignant par $3h$ l'indice de 2 relativement à un nombre premier $p = 6l + 1$ dont 2 est résidu cubique, les indices des racines de la congruence

$$x^3 \equiv 2 \ (\text{mod. } p)$$

sont

$$h, \ h + \frac{p-1}{3}, \ h + 2\frac{p-1}{3},$$

et que ces racines sont les « numeri » correspondant à ces indices.

2° que les indices des racines de la congruence

$$x^4 \equiv 2 \ (\text{mod. } c)$$

(en supposant l'indice de 2 égal à 4μ) sont

$$\mu, \mu + \frac{c-1}{4}, \mu + 2\frac{c-1}{4}, \mu + 3\frac{c-1}{4},$$

et que ces racines sont les « numeri » correspondants à ces indices.

La démonstration qui semble la plus simple est celle qui est fondée sur cette propriété des racines primitives d'un nombre premier p, d'appartenir à l'exposant $p-1$, du sorte qu'une congruence de la forme

$$t^m \equiv 1 \pmod{p}$$

ne soit possible pour une racine primitive t, qu'à la condition que l'exposant m soit divisible par $p-1$.

Prenons d'abord la congruence

$$x^3 \equiv 2 \pmod{p},$$

dans laquelle on suppose 2 résidu cubique de $p = 6k + 1$. Soit t la racine primitive de p choisie comme base d'un système d'indices. On aura

$$t^{\text{ind. } x} \equiv x \text{ et } t^{\text{ind. } 2} \equiv 2 \pmod{p}.$$

En substituant ces expressions de x et de 2 dans la congruence proposée, on en déduira

$$t^{3 \text{ ind. } x} \equiv t^{\text{ind. } 2}, t^{3 \text{ ind. } x - \text{ind. } 2} \equiv 1 \pmod{p}$$

Comme les seules puissances de t qui soient équivalentes à l'unité suivant le module p, sont celles dont les exposants sont multiples de $p-1$, la dernière formule exige que l'on ait

$$3 \text{ ind. } x \equiv \text{ind. } 2. \pmod{p - 1 = 6k}.$$

Cette congruence est impossible si l'indice de 2 n'est pas multiple de 3; dans le cas contraire, supposé ici, posons ind. $2 = 3h$. On déduit de la dernière formule

$$\text{ind. } x = h + n\frac{p-1}{3},$$

en designant par n un nombre entier quelconque..

Comme les indices qui ne diffèrent entre eux que par des multiples de $p-1$ sont équivalents, il suffit de donner à n les trois valeurs 0, 1, 2. Par conséquent l'indice de x admet trois valeurs non équivalentes

$$h, h + \frac{p-1}{3}, h + 2\frac{p-1}{3};$$

et les nombres qui correspondent à ces indices sont les trois racines de cette équation.

De même si l'on désigne par c un nombre premier $8l + 1$ et qu'on propose de résoudre la congruence

$$x^4 \equiv 2 \pmod{c.}$$

on prendra dans les tables d'indices l'indice du nombre 2. Si l'on désigne par t la base du système d'indices, on aura, comme dans le cas précédent

$$t^{\text{ind.}2} \equiv 2, \quad t^{\text{ind.}x} \equiv x \pmod{c.}$$

et par conséquent

$$t^{4\text{ind.}x} \equiv t^{\text{ind.}2} \quad t^{4\text{ind.}x - \text{ind.}2} \equiv 1 \pmod{c.}$$

Comme les seules puissances de t qui se réduisent à l'unité, suivant le module c, sont celles dont les exposants sont multiples de $c-1$, la dernière formule exige que l'on ait

$$4.\ \text{ind.}\ x - \text{ind.}\ 2 = n.\ (c-1),$$

n désignant un nombre entier. Cette congruence est impossible si l'indice de 2 n'est pas multiple de 4; s'il est multiple de 4, posons : ind. $2 = 4\mu$. On a

$$\text{ind.}\ x = \mu + n.\ \frac{c-1}{4}$$

On obtient tous les indices non équivalents renfermés dans cette formule en donnant à n les quatre valeurs 0, 1, 2, 3. Par conséquent les nombres qui vérifient la congruence proposée sont ceux qui correspondent aux indices

$$\mu,\ \mu + \frac{c-1}{4},\ \mu + 2\,\frac{c-1}{4},\ \mu + 3\,\frac{c-1}{4}.$$

COMUNICAZIONI

De Rossi Prof. M. S. – *Presentazione di un suo lavoro*:

Il Prof. Michele Stefano de Rossi chiamò l'attenzione dell'Accademia sopra il 1° fascicolo 1885 del Bullettino del Vulcanismo italiano, nel quale egli ha pubblicato un primo resoconto di tutti i fatti sismici avvenuti in Italia durante il periodo dei terremoti di Spagna. Indicando il contenuto di quell' articolo ed additandone i dati confermanti le teorie da esso già esposte altre volte, e massime nell'opera sua *Meteorologia endogena* relative alla importanza delle fratture geologiche nei terremoti ed all' azione evidente in essi del vapore d'acqua, confrontò codesti risultati con gli studi speciali sul medesimo argomento ora pubblicati dal Daubrée in Francia nella *Revue des deux Mondes* e dalla commissione Sismologica di Spagna nel suo primo resoconto ufficiale del disastroso fenomeno testè avvenuto nell'Andalusia. La concordia mirabile di tutti i fatti e dei ragionamenti sopra essi stabiliti indicano fino all' evidenza che la scienza intorno al misterioso argomento dei fenomeni geodinamici oggi ha trovato una via sicura per progredire specialmente per la concordia colla quale si vengono organizzando i metodi di osservazione.

Castracane, Conte Ab. F. – *Presentazione di un'opera del Prof.* G. B. Carnoy:

Il Presidente presentò all'Accademia in nome del socio corrispondente Sig. Canonico Gio: Battista Carnoy professore nella Università cattolica di Lovanio la prima parte di un' opera che questi sta pubblicando sotto il titolo « *La Biologie cellulaire*, *étude comparée de la cellule dans les deux regnes* ». Lo zelo con il quale l'Autore attende a promuovere gli interessi della scienza lo portò ad istituire sin dal 1876 un laboratorio di microscopia applicata alla Citologia ossia studio della cellula e della sua biologia; il quale studio riguardando l'elemento precipuo di ogni essere organizzato abbraccia ambi i regni, il vegetale e l'animale, interessando egualmente il botanico e il zoologo, il medico e il patologo. Questa prima parte dell' opera comprende la tecnica microscopica; e descritto dettagliata-

mente il microscopio semplice e il composto vengono ricordate le qualità che si richiedono in ogni sua parte. In seguito si ragiona dei diversi accessori, sia che riguardano l'illuminazione a luce bianca oppure monocromatica o con raggio polarizzato o con l'applicazione dell'analisi microspettrale. Vengono pure indicati i differenti metodi di micrometria e di determinazione degli angoli dei cristalli, ed i metodi di riproduzione delle imagini microscopiche con l'aiuto della camera lucida o con l'applicazione diretta della fotografia.

Lo studioso in seguito viene ammaestrato nella microchimica, apprendendo le proprietà e l'uso dei diversi reagenti chimici e delle colorazioni, dalle quali si ottiene il rendere più distinti i diversi tessuti e vengono somministrate indicazioni utilissime sulla costituzione chimica delle diverse parti di un dato organismo. Finalmente l'istruzione tecnica termina con ottimi suggerimenti sulla scelta dei materiali di studio, su i processi microtomici e sul modo di fare le preparazioni. Si passa poi a dare le nozioni generali sulla cellula, accennando alla storia della dottrina cellulare, dividendola in tre epoche, cioè dal 1865 al tempo di Roberto Nooke e di Marcello Malpighi sino ai nostri giorni; e quindi si viene a parlare del nucleolo della cellula. Ogni volta che si viene a trattare di un argomento speciale, a questo precede la bibliografia indicando quegli autori, che in più special modo trattarono della materia. Ogni argomento viene illustrato con numerose buone figure intercalate al testo; e in una parola nulla manca per fare di questo un manuale e un testo, al quale utilmente ricorrerà chiunque con il mezzo del microscopio vuole indagare l'intima costituzione e natura di un organismo.

Boncompagni, D. B. – *Presentazione di memorie manoscritte e di pubblicazioni* :

D. B. Boncompagni presentò da parte del S. C. Sig. Ammiraglio De Jonquières un esemplare manoscritto d'una sua memoria intitolata: « Étude » sur les équations algébriques numériques dans leur relation avec la Règle » des signes de Descartes », già pubblicata negli Atti relativi alla seconda sessione di questo medesimo anno; e da parte del S. C. P. Pepin un esemplare manoscritto di ciascuno dei suoi lavori seguenti:

1. « Étude sur quelques formules d'analyse utiles dans la théorie des nombres »,

2. « Sur trois théorèmes de Gauss »,

3. « Sur quelques congruences binomes ».

Presentò inoltre un esemplare del fascicolo intitolato « BULLETTINO ‖ DI ‖ BIBLIOGRAFIA E DI STORIA ‖ DELLE ‖ SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE ‖ TOMO XVII ‖ LUGLIO 1884 » ecc., e da parte del sig. prof. Angelo Genocchi un esemplare di ciascuna delle seguenti tirature a parte:

ALCUNE ASSERZIONI ‖ DI C. F. GAUSS ‖ CIRCA LE FORME QUADRATICHE $YY + nZZ$ ‖ NOTA ‖ DI A. GENOCCHI ‖ ESTRATTO DAL « BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA ‖ DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE » ‖ TOMO XVII, ‖ APRILE 1884 ‖ ROMA ‖ TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE ‖ Via Lata, n 3 ‖ 1884.

TEOREMI DI SOFIA GERMAIN ‖ INTORNO ‖ AI RESIDUI BIQUADRATICI ‖ NOTA ‖ DI ANGELO GENOCCHI ‖ ESTRATTO DAL « BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA ‖ DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE ‖ TOMO XVII. — APRILE 1884. ‖ ROMA ‖ TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE ‖ Via Lata, n. 3 ‖ 1884.

DUE LETTERE ‖ DI ‖ C. F. GAUSS ‖ PUBBLICATE ‖ DAL ‖ Principe B. BONCOMPAGNI ‖ NOTA ‖ DI ‖ A. GENOCCHI ‖ TORINO ‖ ERMANNO LOESCHER ‖ Libraio della R. Accademia delle scienze ‖ 1884, in 8° di 7 pagine nella 2ª delle quali si legge: Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, vol. XX. ‖ Adunanza del 30 novembre 1884 ‖ TORINO, STAMPERIA REALE ‖ di G. B. Paravia e C.

De Rossi, prof. M. S. – *Presentazione d'un opuscolo* del prof. D. Ragona:

Il Segretario presentò per parte del socio corrispondente prof. D. Ragona un suo secondo opuscolo sul clima di Assab.

COMITATO SEGRETO

L'Accademia riunitasi in Comitato segreto procedette alla votazione per la nomina a soci corrispondenti dei signori prof. Angelo Genocchi, prof. Giuseppe Marcalli, Prof. Stefano Rossi, Monsignore Bartolomeo Grassi Landi. Vennero tutti eletti a pieni voti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, *Presidente*. – Prof. A. Statuti – Prof. F. Ladelci – Dott. M. Lanzi – Prof. M. Azzarelli – P. F. Ciampi – Prof. V. De Rossi Re – P. F. S. Provenzali – Cav. F. Guidi – Cav. G. Olivieri – D. B. Boncompagni – P. G. Lais – Prof. M. S. de Rossi, *Segretario*.

La seduta apertasi legalmente alle ore 5 p. venne chiusa alle ore 7 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* — Vol. XX, disp. 1ª (Novembre 1884). Torino 1885. In 8.°
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85. Serie IV, Rendiconti. Vol. I. Fasc. 8. — Roma, 1885. In-4.°
3. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* — T. VII. — Entr. 3ª T. VIII, Entrega 1ª. Buenos Aires, 1884. In 8.°
4. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de S.t-Pétersbourg.* T. XXIX, — n.° 3. 1. 1884. In-4.°
5. *Bulletin de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse.* — T. V, 1884, n. 1, 2. — Toulouse, 1884. In-8.°
6. *Bullettino della Reale Accademia Medica di Roma.* — A. XI, n.° 1. Roma, 1885. In 8.°
7. CARNOY (J. B.) — *La biologie cellulaire.* — Fasc. 1. — Lierre, 1884. In-8.°
8. *Crónica cientifica.* — A. VIII, n. 174—176. Barcelona, 1885. In 8.°
9. GENOCCHI (A.) — *Due lettere di C. F. Gauss pubblicate dal Principe B. Boncompagni.* Torino, 1884. In-8.°
10. —— *Teoremi di Sofia Germain intorno ai residui biquadratici.* Roma, 1884. In 4.°
11. —— *Alcune osservazioni di C. F. Gauss circa le forme quadratiche* YY $\pm$ nZZ. — Roma, 1884. In-4.°
12. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVII. — n.° 2. — St. Pétersbourg, 1885, in-8.°
13. KUGELGEN (P.) — *Ein blick auf das Unterrichtswasen Russlands im XVIII. Jahrhundert bis* 1782 *von Graf D. A. Tolstoi.* — St. Petersbourg, 1884. In-8°
14. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, Serie XII, Vol. IX. — quad. 834, Vol. X. quad. 835, 836. — Firenze, 1885. In-8.°
15. LE JOLIS (A.) — *Fleurs anormales de « Cytisus laburnum » et « Digitalis Purpurea ».* — Cherburg (s. a.) in-8.°
16. MANSION (P.) — *Recensione di pubblicazioni di B. Boncompagni.*
17. *Mémoires de l'Académie de Stanislas* 1883. — Anno CXXXIV, Serie V, T. 1. — Nancy, 1884. In-8.°
18. *Memorias de la Real Academia de ciencias naturales y artes de Barcelona.* — N. 1 y 2. (Segunda Época). T. 1. — N. 3 y 4, 5, 6, 7 (Tercera Época) T. 1. n. 8. Barcelona, 1879, 1883—84. In-8.°
19. *Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino.* — Serie Seconda, T. XXXVI. — Torino MDCCCLXXXV, in-4°.
20. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle. Partie technique.* — Deuxième série. T. XI, 3e e 4e livraison. Paris, 1885. In-8.°
21. —— *Partie littéraire.* — Deuxième série, T. XXI, 3e et 4e livraisons. Paris, 1885. In-8.°
22. RAGONA (D.) — *Sul clima di Assab,* 2° articolo. — Modena, 1885. In-8,°
23. *R. Comitato Geologico d'Italia,* 1885. — Bollettino n. 1 e 2. Roma, 1885. In-8.°
24. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). A. XXIV, fasc. 1, 2. — Napoli, 1885, in-4.°
25. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — A. 1885, Febbraio. Roma, 1885. In-8.°
26. *Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte.* — Jah. VII. — Heft I—IV. — Stuttgart, 1884, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VI^a DEL 17 MAGGIO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SOPRA UNA MEMORIA DEL CH. PROFESSORE P. M. GARIBALDI

DIRETTORE DEL R. OSSERVATORIO DELL' UNIVERSITA' DI GENOVA

INTITOLATA

« VARIAZIONI ORDINARIE E STRAORDINARIE DEL MAGNETE DI DECLINAZIONE » OSSERVATE IN GENOVA NEL PERIODO 1872—84. »

NOTA
DEL P. G. STANISLAO FERRARI S. J.

Ho l'onore di presentare all'Accademia un importante lavoro del Ch. Prof. Garibaldi intorno alle variazioni ordinarie e straordinarie del magnete di declinazione osservate in Genova nel periodo 1872-84. Non mi trattengo qui a darne un sunto generale per ciò che riguarda le variazioni ordinarie poichè esso conferma quanto era già noto dai lavori di Sabine di Wolf e del P. Secchi quanto alla loro correlazione coll'andamento periodico dei massimi e minimi delle macchie solari anzichè coll' andamento dei massimi e minimi della temperatura.

Ciò che in quel lavoro più mi colpì , com'era ben naturale , si fu la parte che concerne alle straordinarie perturbazioni o burrasche magnetiche, conciossiachè volle il Ch. Autore con gentile pensiero cominciare la trattazione di quest' argomento col richiamare l' attenzione dei dotti sopra quanto io scriveva in proposito fino dal 1867 e riprodusse letteralmente (pag. 47-48)

le due leggi che comprendono il risultato delle mie indagini del periodo di 17 anni che cioè: « 1° Allora quando si hanno grandi alternative nelle macchie solari, le perturbazioni magnetiche accadono prossimamente all'epoca della massima e minima escursione che rappresenta il numero delle macchie; 2° negli anni di minimo e di deboli variazioni (non maggiori di uno a tre) nel numero delle macchie, le perturbazioni, oltre all'essere generalmente assai più deboli, avvengono principalmente quando nel Sole, di pulito che era, si formano alcune macchie ».

Non posso a meno di non provare una viva soddisfazione vedendo che i miei deboli sforzi in proposito formano ormai anche a giudizio di molti scienziati nostrani e stranieri, un notissimo patrimonio nella scienza.

Ciò poi che forma il carattere tutto speciale del lavoro del Prof. Garibaldi si è lo studio che esso fece intorno alle relazioni fra le variazioni normali delle declinazioni diurne ed il numero normale delle perturbazioni o burrasche magnetiche e come rilevasi dagli specchi numerici e dalle curve grafiche che riassumono il risultato delle sue ricerche apparisce manifesta la conclusione colla quale pon termine alla sua memoria ed è: « che le » perturbazioni o burrasche magnetiche sono regolate dalla medesima legge » fisica che governa le variazioni dell'ago e che – come queste – hanno » la loro causa e misura nelle macchie od energia solare e si svolgono in » un eguale e comune periodo » (pag. 54).

Un fatto però degno di nota emerge dal lavoro dell'illustre professore il quale non lascia di accennarlo ed è manifesto specialmente dall'andamento della curva grafica (pag. 53) che cioè *tanto* per le declinazioni magnetiche mensili *quanto* per le perturbazioni normali di mese si ha un *massimo* spiccatissimo pel mese di Aprile, a preferenza di ogni altro ed anche dei mesi estivi ne'quali è maggiore la presenza del sole sull'orizzonte.

Questo fatto vien confermato dal quadro che pubblicai nel 1877 pel periodo di 17 anni (pag. 19) sul quale però non feci speciale attenzione occupato com'era a considerare la cosa sott'altro aspetto. Ora però che il veggo sì chiaro nel lavoro del Garibaldi godo di potergli prestare una luminosa conferma aggiungendo al suo periodo 1872–84 il mio periodo 1860–76. Siccome però in questi due periodi si hanno in comune gli anni 1872–76, resta un periodo complessivo di anni 23 che non è certo da disprezzarsi.

Riandando gli annali della scienza su tale argomento trovo che il massimo d'Aprile venne eziandio chiaramente rilevato dal celebre Quetelet (1) nel

(1) Annales de l'Observatoire de Bruxelles Tom. XIII (Sur la Physique du Globe) pag. 144—146.

disputare le osservazioni di Bruxelles e di Monaco, che vengono confermate da quelle di Airy per l'osservatorio di Greenwich. Il periodo da essi esaminato si estende dal 1841 al 1857 che aggiunto al precedente forma un periodo totale di ben 42 anni e però di somma importanza e tale da costituire veramente una legge.

Il Ch. Prof. Garibaldi (pag. 22) colpito da tale differenza fra i valori di Aprile e quelli assai minori del maggio successivo emise il dubbio « non » forse nel maggio siano preponderanti (son sue parole) fattori tellurici o » cause speciali che vittoriosamente contrastano coll'influenza del sole che » continui ad avvicinarsi aumentando la sua declinazione Nord. »

Considerando invece il Quetelet chè se dalla lunghezza del giorno e della temperatura, potrebbe in qualche modo derivare la prevalenza della *variazione mensile* della declinazione, nei mesi nei quali il sole occupa l'emisfero Nord, pure il *massimo di Aprile* dimostra evidentemente essere per lo meno incompleta la ragione assegnata. Propose quindi questa legge: « la » grandezza della variazione magnetica mensile essere in ragione diretta » della potenza vegetativa della terra » in guisa che la temperatura non possa ritenersi come diretta misura dell'una e dell'altra potenza, la magnetica cioè è la vegetale.

Da quanto si è detto apparisce qual campo vastissimo ancora resti per le profonde investigazioni dei dotti le quali certamente su tale materia debbono estendersi all'esame della relazione fra i fenomeni solari e magnetici, e specialmente intorno al modo di agire del sole rispetto al magnetismo terrestre, alla ricerca cioè di questo vero se il sole sia causa *diretta* ovvero soltanto *indiretta* dei fenomeni del magnetismo terrestre verità ancora in buona parte nascosta alle nostre indagini ma che vogliamo sperare verrà fra non molto svelata dagli sforzi riuniti di tanti scienziati che si dedicarono a quello studio.

Termino questa breve nota col far riflettere essere però un tale studio non esclusivo soltanto della *fisica terrestre*, sibbene doversi fare in accordo coll'*Astronomia-fisica* poichè è ormai indubitato, specialmente dal fatto delle variazioni *secolari* del magnetismo terrestre, e della sua correlazione coi periodi delle macchie solari, che il magnetismo terrestre esige per ispiegazione una causa cosmica e però da cercarsi al di fuori della cerchia ristretta dal nostro globo.

OSSERVAZIONE SU UNA DIATOMEA FOSSILE, RELATIVA AL PROCESSO DI RIPRODUZIONE.

Chiunque intende applicarsi allo studio della Natura, ed in particolar modo se voglia prendere a soggetto di speciali ricerche una serie di forme organiche, dovrà avanti tutto porre ogni cura a riconoscere le leggi biologiche di quelle, non solamente per ciò che riguarda la loro struttura, ma più ancora per riconoscere il processo di riproduzione. Quanto alle Diatomee e alla loro biologia i primi a discorrerne furono Ehrenberg e Kützing, ma l'ignoranza della lingua tedesca mi ha vietato il consultarli nelle pubblicazioni originali. Fortunatamente per me non fu l'istessa cosa con la *Synopsis of the British Diatomaceæ* di Guglielmo Smith e con la *History of Infusoria, including the Desmidiaceæ, and the Diatomaceæ*, di Andrea Pritchard, potendo io decifrare con sufficiente facilità la lingua inglese. Questo mi offrì ancora modo di prendere cognizione di un più recente lavoro su la biologia delle Diatomee del ch. D.r Pfitzer con il titolo « *Untersuchungen uber bau und entwichlung der bacillarieen* » essendone stata data una accurata analisi dall'illustre Naturalista Irlandese Eugenio O'Meara nel *Quarterly Journal of Microscopical science*. Tutti i sunnominati Autori concordano nel dare alle Diatomee la facoltà di moltiplicare per divisione cellulare, mentre che si riproducono per conjugazione. Taluni però riguardano la divisione o temnogenesi quale vera riproduzione, quando quel processo non è altro che la moltiplicazione della cellula e l'estensione della vita individuale, con la quale ha luogo la costituzione e lo sviluppo di qualsiasi tessuto organico, animale o vegetale.

Ma se tutti sono concordi nel riconoscere alle Diatomee i due processi, la moltiplicazione cioè o autofissione, e la riproduzione sessuale o processo di conjugazione, v'è non poco dissenso sul modo con il quale la conjugazione ha luogo, o a dir più vero si è discordi in riguardo al risultato della conjugazione. Alcuni nell'idea preconcetta della divisione e suddivisione della cellula, con la quale vedesi procedere lo sviluppo e l'incremento di qualsiasi tessuto organico, vollero ridurre in ultima analisi a tale processo il risultato della coniugazione, e appoggiati a talune poche osservazioni eseguite su qualche genere e specie di Diatomee immaginarono (duce fra questi il ch. D.r Pfitzer) che la conjugazione di due frustuli di quelle

portasse alla formazione di uno o di due sporangi, nel cui seno avesse luogo la produzione di uno o di due frustuli sporangiali della maggior dimensione, destinati a ricondurre la serie decrescente degli individui, risultanti dalla temnogenesi o autofissione, alla misura tipica, punto di partenza della nuova serie o progenie. Tale ingegnosa teoria, avendo il suo fondamento su qualche osservazione di fatto, incontrò grande favore presso molti distinti Botanici Tedeschi, i quali senza troppo discutere il caso nelle Diatomee accettarono quella teoria, perchè così la riproduzione di quelle risultava omologa allo sviluppo di qualsiasi tessuto organico, nel quale riconoscevasi un semplice aggregato di cellule, costituenti ciascuna altrettante individualità.

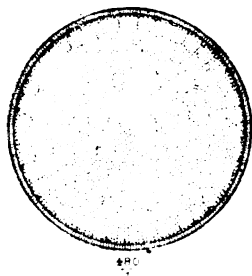
Nella 2.ª sessione del Congresso internazionale botanico tenuto in Firenze nel 1874, mi credetti in dovere di sottoporre al giudizio di quell'autorevolissimo Consesso il mio sentimento contrario a quella teoria, mentre in uno studio così poco seguito della Diatomologia interessa grandemente, che i pochi cultori di tale studio si adoperino ad impedire, che idee non troppo consentanee al vero passino indiscusse, le quali potrebbero venire ripetute da quelli, i quali dovendo far cenno a tali microrganismi, potrebbero ripeterle, sedotti dalla autorità di Quegli, che le emise. In quella solenne occasione pertanto e avanti un consesso di tanta autorità in materia, esposi le mie idee su l'argomento, adducendo numerose prove in confutazione di quella teoria. Fra i diversi argomenti addotti di ragioni intrinseche, dimostrai come l'autofissione, che dovrebbe far seguito e prendere per punto di partenza il frustulo sporangiale risultante dal processo di conjugazione sessuale e dall'auxospora, non possa aver luogo nel più grande numero di generi, cioè 1.º in quelli nei quali le due valve sono dissimili come nelle Cocconeidee: 2.º in quelle che avendo le due valve eguali, queste però costantemente si dispongono in modo da incrociare gli assi di figura, come i *Campylodiscus*, 3.º finalmente quelli, che mai dispongono le due valve in condizione omologa e parallela, come avviene degli *Asteromphalus* e *Asterolampra*, nei quali i raggi delle due valve si alternano in luogo di sovrapporsi. E questo mio argomento viene confermato dal fatto, che fra i molti casi di autofissione o temnogenesi registrati dalla Scienza sin ora non incontrasi un solo caso, che vi faccia eccezione. Il medesimo argomento io confortavo con la testimonianza dell'illustre Micrografo Inglese D.r Wallich, il quale riguarda il frustulo sporangiale quale forma mostruosa, con la quale cessa la serie decrescente. Alla quale opinione si aggiunge la gravissima autorità dell'Americano Professore Hamilton Laurence Smith, il quale

nota come lo *Stauroneis Phœnicenteron*. E, non è altro che la forma sporangiale dello *St. gracilis*. E, al quale quello incontrasi unito, senza che mai si abbiano da osservare forme minori del primo tipo.

Nella medesima circostanza confortai la mia opinione con addurre una osservazione personale, che ebbi la ventura di fare nei primordi dello studio intrapreso. Ricordai dunque il fortunato incontro, che mi si presentò nel primo anno che di proposito mi posi a studiare le Diatomee, quando sotto l'ingrandimento del Microscopio considerava un frustulo di *Podosphœnia* tratto da piccolo acquario marino. Trovavasi quello al punto di emettere una nidiata di forme embrionali rotonde, che dall'interno della cellula madre vidi sortire all'esterno ad una ad una, notando ancora che quelle forme rotonde fra loro eguali erano terminate nettamente da una linea, ciò che dimostrava l'esistenza in quelle di una parete, e che appena sortiti nel momentaneo moto di rotazione presentavano alternamente profilo rotondo o lineare. Sarebbe stato utile il fissare la memoria del fenomeno con un disegno, ma impedito da imperfezione congenita della mia mano dovetti contentarmi di descrivere minutamente ogni stadio del fenomeno, come feci al momento che quello si arrestò, supplendo per tal modo con dettagliatissima descrizione alla mancanza di rappresentazione iconografica. Nè nuova può dirsi quella mia osservazione, essendo essa perfettamente consona a quanto venne veduto dal D.r Rabenhorst su di una *Melosira varians*. Ag. del quale caso ci lasciò una figura, e concorda assolutamente con altra osservazione parallela dell'Irlandese Micrografo Eugenio O'Meara intorno un *Pleurosigma Spencerii*, W. Sm. Ad onta però di queste tre osservazioni esattamente parallele tra loro, nelle quali venne osservata la sortita di molteplici forme rotonde eguali e perfettamente circoscritte, in luogo di riconoscere in questi un caso di riproduzione, per non rinunziare ad una contraria preconcetta idea, fu gratuitamente supposto, che quei corpicciuoli rotondi non fossero altro che piccole Monadine o altri simili infusori aggirantisi attorno la Diatomea.

Io disperavo di pervenire a convincere persone, che stimo altamente, ma che sono a mio credere troppo tenaci in sostenere idee preconcette, quando il caso mi fu propizio nel presentarmi una palpabile prova, che ciò che venne interpretato nei tre sopracitati esempi per un insieme di forme embrionali, era realmente tale. Quantunque la nostra Italia sia molto ricca in depositi di Diatomee specialmente marine, però i giacimenti di queste presentansi molto poveri per varietà di tipi, così che questo mi fa propendere alla

opinione che la identità delle forme sia prova che i diversi giacimenti facciano parte di un banco continuo, che incominciando dalla estrema Sicilia prosegue lungo la Penisola, forse anche oltre l'Italia centrale. Tutta questa formazione appartiene al plioceno, e quindi non è da maravigliare per la uniformità della flora di cotesti depositi. Ora però finalmente le diligenti investigazioni del ch. D.r Dante Pantanelli condussero al rinvenimento di un deposito di formazione molto più antica nell'Appennino Modenese presso Monte Gibbio, e nel Reggiano presso le Quattro Castella e precisamente nel luogo detto La Madonna della Battaglia. Questi due depositi differiscono grandemente dagli altri, perchè in luogo di presentarsi in condizione scistosa costituiscono una massa irregolare di marna silicea, e al dire del Pantanelli sembra appartenere al mioceno inferiore. La flora Diatomacea di quelli grandemente differisce dagli altri depositi Italiani, ed è ricca di nuovi tipi, che ora vado studiando, e che mi daranno argomento ad altra pubblicazione.

Fra le molte rare e nuove forme del deposito del Monte Gibbio, che notai nell'esaminare alcune preparazioni fatte di tale materiale incontrai il tipo, la di cui figura è qui annessa. Questo tipo mi tenne alquanto perplesso su la determinazione della specie, alla quale appartenga. Consultando l'opera iconografica di Adolfo Schmidt su le Diatomee conosciute l'avrei ritenuto analogo alla fig. 31 della Tav. 58 del suo atlante, se non fosse che quella forma proveniente da Mors nel Iutland ne differisce unicamente per una piccola areola irregolare liscia al centro. Però, rileggendo attentamente le definizioni delle diverse specie di *Coscinodiscus* date da Pritchard, nel leggere i caratteri del *C. radiolatus*. E, non parmi potere dubbitare nell'attribuire il nostro tipo a questa specie. A tale specie infatti vengono dall'A. assegnati i seguenti caratteri « Granuli puntiformi, eguali, radianti » Così quantunque io non abbia consultato la figura originale data da Ehrenberg mi ritengo autorizzato a riguardare quel tipo per *C. radiolatus*. E. Ma quello, che più particolarmente attrasse la mia attenzione su questo esemplare, fu il vedere nel perimetro della valva numerosissime impronte di piccole forme rotonde

pressate insieme. La dimensione di tali impronte e più la distribuzione irregolare di quelle, per la quale si mostravano stipate e sovrapponentisi in un punto e in altro vedevansi in ordine più rado, mi dissuase dal riguardarle quale una areolazione della valva radialmente punteggiata. Fui pertanto astretto a cercare altra interpretazione di quella apparenza, e me la suggerì la ricordanza di quanto da me fu veduto nel caso sopraricordato della riproduzione della *Podosphœnia*, analoga alla osservazione di Rabenhorst su di una *Melosira varians*. Ag. e quella di O'Meara su un *Pleurosigma Spencerii*. Sm. Ritenni pertanto, che quelle forme rotonde eguali strette nel perimetro della valva dovessero certamente riguardarsi quali impronte delle forme embrionali rimaste in seno della cellula madre, allor che fu sorpresa da morte.

La preparazione originale, che sottoposi all'esame di persone, che si interessano o anche partecipano ai miei studi, viene gelosamente conservata per farla esaminare da chiunque ne avesse vaghezza, e per farne un fotogramma appena che ne avrò agio. La figura, che viene qui data, fu sotto i miei occhi ritratta con l'aiuto dell'ottima camera lucida di Nachet, e quindi le misure sono della maggiore fedeltà. Però lo stato difettoso dell'esemplare fossile mi persuase di far supplire dal disegnatore alcune parti obliterate, e perciò nel disegno non si può esattamente verificare la circostanza della distribuzione ineguale delle forme rotonde contenute. Ma il non conoscersi in alcun *Coscinodiscus* l'esistenza di tali areole rotonde insieme alla granulazione, e più la grandissima analogia (per non dirla identità) con quanto venne in tre diversi casi e da tre diversi osservatori notato e riferito, rende poco meno che evidente la summentovata interpretazione.

Posto questo però, spontaneo presentasi un insegnamento, che ritengo completamente nuovo alla Scienza, il quale pure positivamente contradice una mia asserzione, che ritenevo indiscutibile. Nella memoria da me presentata al Congresso Internazionale Botanico in Firenze, discorrendo della condizione organica, in cui si trova la silice, che costituisce la parete della cellula diatomacea, la quale condizione permette alla medesima parete l'accrescere e il distendersi come dimostrai con numerosi esempi, credetti potere avanzare la proposizione, non essere cioè assolutamente necessaria la presenza della silice in qualunque stadio della vita delle Diatomee e nominatamente nello stato embrionale. Ma il vedere rimasta nella valva la forma evidente della numerosa prole del frustulo genitore, attesta l'esistenza di un velo siliceo, che già costituiva la parete delle nuove Diatomee. Un inse-

gnamento così nuovo e inatteso esige però la conferma di ulteriori osservazioni di altri casi per essere autorizzati a generalizzarlo.

Nè una tale conferma dovrà essere attesa lungo tempo, specialmente per quelli, che si danno più particolarmente all'esame di preparazioni di Diatomee fossili, mentre non dovrà riescire tanto raro un caso simile a quello da me osservato di una Diatomea sorpresa dalla morte al momento di dare alla luce la nuova prole. Ed in fatti in seguito alla surriferita fortuita osservazione ho richiamato alla mente quanto più volte ebbi sott'occhi senza sapermi rendere conto di quanto vedevo. In replicate volte mi avvenne, che nell'esaminare preparazioni da me fatte di Diatomee fossili mi si parassero innanzi taluni agglomeramenti di minutissime e tenuissime forme silicee rotonde, eguali tra loro, e a contorno perfettamente definito, senza potervi distinguere particolari caratteri di struttura da poter dire a qual genere o a quale specie appartenessero. Per analogia con il caso sopraccennato sembrami dover ritenere con la maggior verosimiglianza che quelli agglomeramenti fossero da riguardare quali nidiate di giovani Diatomee, che erano in seno alla cellula madre nel momento di sortire alla luce, quando subitamente venne interrotta la vita vegetale di quella, o della cisti in grembo alla quale ebbero origine e il loro primo sviluppo.

Da tutto questo sorge spontaneo l'insegnamento a quelli che si dilettano nel contemplare con l'aiuto del Microscopio le maraviglie della Natura e del Creato, quanto cioè si debba da essi porre attenzione nell'osservazione di ogni minima cosa e nel valutare qualunque lieve circostanza, in ciò che si para allo sguardo.

Dissi appositamente osservare e non dissi vedere o riguardare, mentre il riguardare e il vedere è il semplice far uso della facoltà visiva, quando l'osservare implica la simultaneità dell'atto di vedere alla operazione mentale, con la quale si confronta quanto si vede con ciò, che se ne conosceva. L'attenta considerazione soltanto ci porta ad estendere le nostre cognizioni confermandole o pure modificandole; quella è il necessario requisito di chiunque studia la Natura, ma è la dote necessaria più particolarmente a quegli, che prese a speciale soggetto di studio organismi così maravigliosamente piccoli come sono le Diatomee; le quali non potendo viventi venire isolate e poste a parte in condizione di regolare sviluppo, non ci lasciano speranza di conoscerne i speciali fenomeni biologici, se non in seguito di fortuite osservazioni.

Ab. Francesco Castracane.

COMUNICAZIONI

Boncompagni, D. B. – *Presentazione*:

Il ch. sig. Principe D. B. Boncompagni presentò all'Accademia, da parte dell'autore, una lettera scrittagli dal sig. Dott. Gustavo Eneström, in data dei 29 Aprile 1885, intitolata: *Lettre sur un théorème de Goldbach*. In questa lettera è riportato un passo di una lettera di Leonardo Euler a Cristiano Goldbach, in data dei 30 Giugno 1742, nel quale l'Euler dice essergli stato comunicato dal Goldbach il teorema, che ogni numero pari è la somma di due numeri primi.

Provenzali, P. F. S. – *Presentazione di una sua nota*: (1)

Il ch. P. Provenzali tornando sulla questione se le radiazioni solari possano produrre qualche azione chimica nelle grandi profondità sottomarine, dimostrò che i risultati delle recenti esperienze fatte nella rada di Villefranche dai sig. Fol e Serrazin non solo tali da potersene assolutamente inferire che al di là di 400 metri alcun raggio chimico non penetra nell'acqua del mare. I principali fatti recati dal disserente a prova del suo assunto furono il diverso potere assorbente dell'acqua per i diversi raggi che costituiscono le radiazioni solari, e l'attitudine che hanno alcuni di questi raggi di agire chimicamente sulle sostanze organizzate e non sui composti minerali o anche organici fuori dell'influsso della vita. Inoltre fece notare che trattandosi di radiazioni già molto indebolite dall'assorbimento, il tempo di 10′ che durò ciascuna delle suddette sperienze, non basta perchè dalla mancanza di effetti chimici sensibili si possa con certezza conchiudere la totale assenza di raggi capaci di produrre questi effetti.

Statuti, A. – *Presentazione di un catalogo di crostacei*: (2)

Il ch. sig. Ingegnere A. Statuti, tanto a suo nome che del socio corrispondente sig. Biagio Donati, presentò all'Accademia sotto il titolo di « *Fauna* » *Carcinologica della Provincia Romana* » la prima parte di un loro catalogo metodico e sinonimico dei crostacei marini, terrestri e fluviali, che vivono nella nostra regione, compilato da essi in base ai sistemi di classifica più recenti.

Questa prima parte comprende i crostacei del litorale di Civitavecchia: nella seconda sarà dato il complemento coll'aggiunta di quelli che si rinvengono nel resto del litorale fino a Terracina, compresi, ben inteso, i corsi di acqua Pontini.

(1) Questa nota è stata svolta nella memoria sul medesimo argomento pubblicata nel fascicolo della sessione I^a del 21 dicembre 1884.

(2) Tale catalogo verrà pubblicato in uno dei seguenti fascicoli.

Il Disserente anzi tutto fece notare che non esisteva fin qui veruna opera speciale, relativa cioè alla nostra provincia, che pur abbraccia una distesa di lido assai ragguardevole (circa 220 chilometri), sopra questa classe di animali apteri, dei quali è noto che il nostro Mediterraneo è ricco oltremodo. Dato poi un cenno sull'importanza che hanno i crostacei nell'alimentazione dell'uomo, aggiunse che quantunque lo studio da essi eseguito sopra le specie che vivono presso noi abbia a considerarsi come un lavoro d'interesse puramente locale; tuttavia, inteso come una contribuzione alla Fauna della nostra provincia, potrà tornare di una qualche utilità, se non altro allo scopo di far conoscere quali siano le produzioni del nostro paese.

Sottopose quindi all'Accademia le tavole delle figure di tutti i crostacei del litorale di Civitavecchia, che sono compresi nella memoria esibita: quali figure tuttochè disegnate e colorite dal vero con molta precisione ed esattezza dal nominato socio corrispondente sig. Donati, non vennero intercalate nel testo per la semplice ragione che riferendosi per la massima parte ad animali già noti e che trovansi già figurati e descritti nelle grandi opere magistrali di Storia Naturale, possono sempre riscontrarsi nelle opere suddette; delle quali, come è di uso, non si è omessa per ogni singola specie la relativa citazione per comodo di chi amasse a suo bell'agio consultarle.

Infine il disserente richiamò l'attenzione dell'Accademia sopra quattro specie di crostacei viventi, che per i loro caratteri distintivi non sembrano perfettamente corrispondere con quelle finora descritte. A migliore intelligenza di ciò gli autori del catalogo hanno inserto nel medesimo tanto le figure quanto le descrizioni di queste specie, intendendo di sottoporle al giudizio degli scienziati per decidere se realmente possono accettarsi come *specie nuove*, o piuttosto come semplici *varietà* locali.

GRASSI LANDI, MR. B. – *Presentazione di un suo opuscolo*:

Il ch. Monsignor Bartolomeo Grassi Landi presentò il suo recente lavoro sopra « *L'armonia dei suoni col vero corista o diapason normale* ».

DE ROSSI, Prof. M. S. – *Presentazione di opuscoli di soci*:

Il segretario presentò da parte dell'autore socio corrispondente sig. E. Catalan una nota a stampa intitolata: *Sur des formules relatives aux intégrales Eulériennes*: e da parte dell'autore socio corrispondente sig. prof. D. Ragona un suo opuscolo intitolato: *Il Fohen del* 6 *Marzo* 1885.

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

Lettere di ringraziamento del Prof. Cerebotani e del prof. Genocchi per la nomina a soci corrispondenti.

COMITATO SEGRETO

Il Presidente diede relazione dell'udienza pontificia accordata al Comitato Accademico per la presentazione dei due volumi degli Atti, relativi agli anni XXXV e XXXVI. Riferì quindi le parole di somma benevolenza, con le quali il Santo Padre si espresse verso la nostra Accademia ed il Suo Volere di promuovere e patrocinare sempre più l'attività dei lavori accademici.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. F. Castracane, *Presidente*. – Principe D. B. Boncompagni – P. F. Ciampi – Comm. C. Descemet – P. F. S. Provenzali – Dott. M. Lanzi – P. G. S. Ferrari – P. G. Foglini – Prof. V. De Rossi Re – Cav. G. Olivieri – Prof. F. Ladelci – Cav. A. Statuti – Prof. M. S. de Rossi, *Segretario*.

CORRISPONDENTI: Mons. B. Grassi Landi.

La seduta apertasi legalmente alle ore $5\frac{1}{4}$ p. venne chiusa alle ore $7\frac{1}{2}$ p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *American Chemical Journal* — Vol. 6, n.° 3. (July 1884). Baltimore, in 8.°
2. *American Journal of Mathematics.* — Vol. VII. — N. 3. — (April 1885) Baltimore, in-4.°
3. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* — Vol. XX, disp. 3 e 4. Torino 1885. In 8.°
4. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884—85. Serie IV, Rendiconti. Vol. I. Fasc. 9—11. — Roma, 1885. In-4.°
5. *Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli.* — 3.ª Serie. — Vol. III. — Napoli, 1884, in-4.°
6. *Atti della Società crittogamologica italiana.* — A. XXVIII. — Serie Seconda, Vol. III. — Disp. IV, — Varese, 1885. In-8.°
7. CATALAN (E.) — *Sur des formules relatives aux intégrales Eulériennes.* Paris, 1884, in-8.°
8. *Crónica científica.* — A. VIII, n. 177—178. Barcelona, 1885. In 8.°
9. GRASSI LANDI Mons. B. — *L'armonia dei suoni col vero corista o diapason normale.* Roma, 1885, in-8.°
10. *La Civiltà Cattolica.* — A. XXXVI, Serie XII, Vol. X. — quad. 837, 838. — Firenze, 1885. In-8.°
11. ONETTI (F.) — *Sull'uso del tabacco da fumare.* — Sanremo, 1885, in-8.°
12. RAGONA (D.) — *Il « Foehn » del 6 Marzo 1885.* — Modena 1885, in-8.°
13. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — A. 1885, Marzo. Roma, 1885. In-8.°
14. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — XL—LIV. Berlin, 1884, in-4.°
15. *The American Journal of Philology.* Vol. IV, 3. Whole N. 15. — Baltimore, 1883, in-8.°
16. TURAZZA (D.) — *Memorie del Lorgna, dello Stratico e del Boscovich relative alla sistemazione dell'Adige e piano d'avviso del Lorgna per la sistemazione di Brenta.* — Padova, 1885, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VIIa DEL 21 GIUGNO 1885

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

TRASFORMAZIONE DEL BINOMIO

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

NOTA

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

1. La risoluzione dell'equazione di grado $2m$ derivativa del secondo grado da origine ad una funzione irrazionale di grado m di un binomio in parte razionale, ed in parte irrazionale di secondo grado, ossia data l'equazione:

$$x^{2m} + px^m + q = 0$$

si ha:

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

e quindi, tenendo conto della sola sua determinazione numerica,

$$x = \sqrt[m]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Qui ci proponiamo di considerare semplicemente il caso elementare di $m = 2$, ovvero l'équazione:

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

che dà:

$$x = \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

2. Prima di venire alla trasformazione di questa funzione procureremo riconoscere, per maggiore chiarezza, quali sieno quelle funzioni binomie il quadrato delle quali si riduca ad una parte razionale ed un altra irrazionale, cioè alla forma:

$$A + \sqrt{B};$$

e quali sieno quelle funzioni i quadrati delle quali sono formati di due parti irrazionali.

Abbiamo

$$a) \qquad [m + \sqrt{n}]^2 = m^2 + n + 2m\sqrt{n} = A + \sqrt{B}.$$

quando si ponga

$$m^2 + n = A, \quad 4m^2 n = B,$$

$$b) \quad [\sqrt{m} + \sqrt{n}]^2 = m + n + 2\sqrt{mn} = A + \sqrt{B}$$

se facciasi

$$m + n = A, \quad 4mn = B.$$

$$c) \quad [\sqrt{m + \sqrt{n}} + \sqrt{m - \sqrt{n}}]^2 = 2m + 2\sqrt{m^2 - n} = A + \sqrt{B}.$$

ponendo

$$2m = A, \quad 4(m^2 - n) = B.$$

$$d) \quad [\sqrt{\sqrt{m} + n} + \sqrt{\sqrt{m} - n}]^2 = 2\sqrt{m} + 2\sqrt{m - n^2} = \sqrt{m_1} + \sqrt{n_1}$$

posto

$$4m = m_1, \quad 4(m - n^2) = n_1$$

e per la (b) otterremo ancora

$$[(\sqrt{\sqrt{m} + n} + \sqrt{\sqrt{m} - n})^2]^2 = (\sqrt{m_1} + \sqrt{n_1})^2 = A + \sqrt{B}.$$

$$e) \quad [\sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}} + \sqrt{\sqrt{m} - \sqrt{n}}]^2 = 2\sqrt{m} + 2\sqrt{m - n}$$

e quindi per la stessa (b) troveremo

$$[(\sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}} + \sqrt{\sqrt{m} - \sqrt{n}})^2]^2 = A + \sqrt{B}.$$

Da questa esposizione risulta che i quadrati delle funzioni a), b), c) si compongono sempre di binomi dei quali una parte è razionale, e l'altra irrazionale, ma i quadrati di quelle corrispondenti a d), e) hanno per loro quadrati binomi le cui parti sono ambedue irrazionali, e le loro potenze quarte sono della forma considerata.

3. Riconosciute le principali forme di quelle funzioni che nei loro quadrati, è potenze quarte danno binomi composti di una parte razionale e di

un altra irrazionale di secondo grado, passeremo alla trasformazione della funzione

$$\sqrt{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

supponendo primieramente che si tratti di una quantità reale, cioè che sia:

$$\frac{p^2}{4} - q > 0.$$

Sia per comodo

$$-\frac{p}{2} = a, \ \frac{p^2}{4} - q = b$$

la funzione che dovremo considerare sarà:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}.$$

4. Il metodo che viene seguito in tutti i corsi moderni consiste nel porre

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad (1)$$

e quindi quadrando la (1), si pongono

$$x + y = a; \quad 2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$$

e quadrata la seconda si hanno le due equazioni coesistenti

$$x + y = a, \quad xy = \frac{b}{4},$$

che, per la composizione delle equazioni di secondo grado, chiamata u la incognita simbolica, si ha:

$$u^2 - au + \frac{b}{4} = 0$$

dalla quale immediatamente

$$u = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b}.$$

onde

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}, \quad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

e la (1) diventa:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b}}\right] \qquad (2)$$

nel cui secondo membro si hanno due funzioni pariforme alla proposta, e dove giova notare che x ed y sono razionali soltanto lorchè è un quadrato esatto la differenza

$$a^2 - b,$$

ed in questo caso si ottiene un risultato semplice perchè, se rappresenteremo per c^2 essa differenza troveremo allora:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

Il secondo membro della (2) è tale che, fatto di esso il quadrato, riproduce il radicando del primo membro, dunque esso membro secondo è la radice seconda dal dato radicando, e perciò dal binomio $a + \sqrt{b}$ si può estrarre la radice seconda quando la funzione

$$a^2 - b$$

sia un quadrato esatto.

8. Pervenuti alla (2) dobbiamo notare che il primo membro è sempre reale, ed il secondo lo è fin tanto che si conserva

$$a^2 - b > 0$$

ovvero

$$a > \sqrt{b}$$

Se avesse luogo la condizione

$$a < \sqrt{b}$$

come si verifica nella soluzione di molte equazioni biquadratiche derivative del secondo grado, per esempio

$$x^4 - 14x^2 - 63 = 0$$

per la quale risulta

$$x = \pm \sqrt{7 \pm \sqrt{49 + 63}};$$

allora considerando il segno positivo pel radicando, il primo membro della (2) è reale ed il secondo immaginario, giacchè il quadrato dalla parte razionale risulta minore del quadrato della irrazionale, cioè

$$49 - 112 < 0.$$

Ma non potendo essere una quantità al tempo stesso reale ed immaginaria, nel secondo membro la immaginarietà deve essere soltanto apparente. Di fatti se poniamo la (2) sotto la seguente forma:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \frac{\sqrt{b-a^2}}{a}\sqrt{-1}} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{b-a^2}}{a}\sqrt{-1}} \right]$$

e per comodo fatto

$$\sqrt{b-a^2}=q$$

avremo

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}}+\sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}}\right].$$

E perchè

$$\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}}=\left(1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}}=\left(1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

sviluppando colle leggi del binomio di Newton sarà:

$$\left(1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}.\frac{q}{a}\sqrt{-1}-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}.\frac{q^2}{a^2}-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{q^3}{a^3}\sqrt{-1}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}.\frac{q^4}{a^4}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-4\right)}{5!}\frac{q^5}{a^5}\sqrt{-1}-\ldots.$$

ovvero

$$\left(1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2!}.\left(\frac{q}{2a}\right)^2+\frac{1.3.5}{4!}\left(\frac{q}{2a}\right)^4-\frac{1.3.5.7.9}{6!}\left(\frac{q}{2a}\right)^6+\ldots\ldots$$

$$+\left[\frac{q}{2a}-\frac{1.3}{3!}\left(\frac{q}{2a}\right)^3+\frac{1.3.5.7}{5!}\left(\frac{q}{2a}\right)^5-\ldots\ldots\right]\sqrt{-1}.$$

Ora dal binomio

$$1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}$$

si passa all'altro col porre $-\frac{q}{a}$ in luogo di $+\frac{q}{a}$, onde avremo immediatamente

$$\left(1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\,!}\left(\frac{q}{2a}\right)^2 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{4!}\left(\frac{q}{2a}\right)^4 - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{6\,!}\left(\frac{q}{2a}\right)^6 + \ldots .$$

$$- \left[\frac{q}{2a} - \frac{1\,.\,3}{3\,!}\left(\frac{q}{2a}\right)^3 + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{5\,!}\left(\frac{q}{2a}\right)^5 \ldots\ldots\right]\sqrt{-1}.$$

sommando otterremo:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sqrt{1 + \frac{q}{a}\sqrt{-1}} + \sqrt{1 - \frac{q}{a}\sqrt{-1}}\right]$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{2}}\left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{q}{2a}\right)^2 + \frac{1.3.5}{4!}\left(\frac{q}{2a}\right)^4 - \frac{1.3.5.7.9}{6\,!}\left(\frac{q}{2a}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$$

ove il secondo membro è reale ma è dato da una serie del!a quale non sempre pnò assegnarsi il suo valore numerico approssimato perchè non può dimostrarsi sempre la sua convergenza, quantunqne abbia segui alternativi nel qual caso basterebbe che fosse almeno decrescente.

6. La trasformazione della (2) può eseguirsi ancora impiegando le funzioni goniometriche, ed anzi in questo caso può assegnarsi il suo valore numerico con quel grado di approssimazione che può desiderarsi.

7. Prima di dare questo metodo crediamo utile porre il seguente

Lemma. – La radice seconda di un binomio immaginario della forma:

$$\cos a + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\,a$$

si ottiene dividendo l'arco per 2.

Si ponga

$$\sqrt{\cos a + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\,a} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.\ \sqrt{-1},$$

ove x, y sieno quantità reali: quadrando ne risultano:

$$x - y = \cos a$$

$$2\sqrt{xy} = \mathrm{sen}\,a$$

ovvero

$$x^2 - 2xy + y^2 = \cos^2 a$$

$$4xy = \mathrm{sen}^2 a$$

che sommate ed estrattane la radice seconda si ottiene

$$x + y = 1.$$

Essendo pertanto coesistenti le due

$$x + y = 1, \quad x - y = \cos a$$

ne dedurremo subito

$$x = \frac{1 + \cos a}{2}, \quad y = \frac{1 - \cos a}{2}$$

ma

$$\frac{1 + \cos a}{2} = \cos^2 \frac{a}{2}; \quad \frac{1 - \cos a}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

dunque

$$\sqrt{\cos a + \sqrt{-1} \operatorname{sen} a} = \cos \frac{a}{2} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{a}{2}.$$

A questo risultato si può giungere ancora ragionando come siegue.
Si ponga

$$\sqrt{\cos\alpha + \sqrt{-1} \operatorname{sen}\alpha} = x + y \sqrt{-1}$$

dalla quale quadrando si deducono

$$x^2 - y^2 = \cos\alpha \quad x^2 y^2 = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2\alpha,$$

e se poniamo

$$y^2 = - z^2$$

avremo

$$x^2 + z^2 = \cos\alpha, \quad x^2 z^2 = - \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2\alpha$$

e quindi, per la composizione delle equazioni di secondo grado, sarà

$$u^2 - u \cos\alpha - \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

dalla quale deduciamo

$$u = \frac{1}{2} \cos\alpha \pm \frac{1}{2}$$

ovvero

$$x^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos\alpha) = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$y^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos\alpha) = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

ed in fine

$$x = \cos\frac{\alpha}{2},\quad y = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Questi valori possono assegnarsi ancora nel modo seguente che notiamo perchè ci sarà utile in seguito.

Riprese l'equazioni

$$x - y^2 = \cos\alpha,\quad xy = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

noteremo che dalle funzioni circolari si ha

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha,\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

di qui pel semplice confronto ne deduciamo

$$x = \cos\frac{\alpha}{2},\quad y = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Dunque da un binomio della forma

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha$$

si estrae la radice seconda dividendo l'arco per l'indice della radice −. Questa verità ha luogo per qualunque radice come vedremo al § 13.

8. Dopo ciò si riprenda

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}} + \sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-4}}\right]. \qquad (3)$$

Si ponga

$$1 + \frac{q}{a}\sqrt{-1} = r\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)$$

dalla quale

$$r\cos\varphi = 1,\qquad r\operatorname{sen}\varphi = \frac{q}{a} \qquad (4)$$

che sono sufficienti per la determinazione di r e φ. A questo fine quadrando e sommando abbiamo:

$$r^2 = 1 + \frac{q^2}{a^2} = \frac{a^2+q^2}{a^2}$$

e perchè $q^2 = b - a^2$ sarà:

$$r = \frac{1}{a}\sqrt{b}$$

e quindi dalle (4)

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{b}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{q}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b-a^2}}{\sqrt{b}},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{b-a^2}}{a}$$

che ci fa conoscere il valore numerico dell'angolo φ. Pel lemma promesso avremo dunque

$$\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}} = \sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$\sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}} = \sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi}{2} - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right]$$

e da queste deduciamo

$$\sqrt{1+\frac{q}{a}\sqrt{-1}} + \sqrt{1-\frac{q}{a}\sqrt{-1}} = 2\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}$$

e quando per la r si ponga il suo valore, la (3) si muta in

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{2}\sqrt{b}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

che, oltre essere reale, può calcolarsi facilmente per logaritmi.

9. Il metodo presentato dai primi analisti per la trasformazione della quantità

$$\sqrt{a+\sqrt{b}},$$

che vale tanto pel caso di

$$a^2 - b > 0 \quad \text{ed} \quad a^2 - b < 0,$$

trovasi a lungo esposto nella storia delle Matematiche del Cossali.

Noi crediamo far cosa utile di notarlo, giacchè di esso non si parla in

verun corso elementare, e d'altronde esso è molto semplice, dipendendo da un principio elementarissimo.

10. Qualunque sia il segno della quantità

$$m - n$$

è certo che sempre ha luogo

$$(m - n)^2 > 0$$

e quindi

$$m^2 + n^2 - 2mn > 0$$

la quale richiede che sia

$$m^2 + n^2 > 2\,mn\,;$$

dunque il seguente:

Principio. – Nel quadrato di un binomio, qualunque sieno le sue parti, cioè tanto razionali, quanto irrazionali, o l'una razionale e l'altra irrazionale, la somma dei quadrati delle due parti è sempre maggiore del doppio prodotto delle parti medesime.

10. Dopo ciò sia proposta, per essere trasformata, la funzione solita

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}.$$

Quando nel binomio $a + \sqrt{b}$ si domanda la sua radice seconda, questa si deve considerare come la espressione ridotta del quadrato di un binomio, le due parti del quale sono incognite. Dunque pel principio stabilito, la parte maggiore del proposto binomio

$$a + \sqrt{b}$$

deve essere formata della somma dei quadrati delle due parti incognite del binomio radice, e la parte minore deve eguagliare il doppio prodotto di queste medesime due parti incognite·

Si ponga ora:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

ove x ed y possono essere tanto razionali, quanto irrazionali, quadrando, e posto essere

$$a > \sqrt{b}$$

avremo

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

e quindi pel principio stabilito, le due

$$a = x + y, \quad \sqrt{b} = 2\sqrt{xy} \qquad (5)$$

delle quali, come è già noto, deduciamo:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{a+\sqrt{a^2-b}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}\right]:$$

Ma se è

$$a < \sqrt{b}$$

in luogo delle (5) dovremo porre

$$x + y = \sqrt{b}, \quad 2\sqrt{xy} = a$$

dalle quali, quadrando è sottraendo, si ha:

$$x^2 - 2xy + y^2 = b - a^2$$

e quindi

$$x - y = \sqrt{b - a^2}.$$

Dunque per la determinazione delle x, ed y abbiamo due equazioni di primo grado, le quali danno

$$x = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{b-a^2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{b-a^2}}{2}.$$

che sostituiti in

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

risulta la quantità reale

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{b-a^2}} + \sqrt{\sqrt{b}-\sqrt{b-a^2}}\right].$$

11. Se per esempio si domandasse la radice seconda della quantità

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

essendo qui

$$a = 2, \quad \sqrt{b} = \sqrt{5}, \quad b - a^1 = 1$$

risulterebbe

$$\sqrt{2+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{5}+1} + \sqrt{\sqrt{5}-1}\right]$$

12. Resta ora che prendiamo a trasformare la funzione

$$x = \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

pel caso che abbiasi

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

onde ritenute le denominazioni già stabilite sarà

$$x = \sqrt{a \pm \sqrt{b}\sqrt{-1}}$$

e posto

$$\sqrt{a + \sqrt{b}\sqrt{-1}} = m + n\sqrt{-1}$$

ove m, n devono essere due incognite reali. Quadrando, pel principio di omogeneità dovremo avere:

$$m^2 - n^2 = a, \quad 2mn = \sqrt{b}$$

le quali quadrate e sommate danno:

$$m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = a^2 + b$$

da cui

$$m^2 + n^2 = \sqrt{a^2 + b},$$

che coesistendo con:

$$m^2 - n^2 = a$$

si avrà:

$$m^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b} + a}{2}$$

$$n^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b} - a}{2}$$

e quindi

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b} + a}{2}}$$

$$n = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b} - a}{2}}$$

e perciò

$$\sqrt{a+\sqrt{b}\sqrt{-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{a^2+b}+a}+\sqrt{-1}\sqrt{\sqrt{a^2+b}-a}\right]$$

Dunque la radice seconda di un numero complesso è un altro numero complesso determinato nella sua forma.

12. Termineremo col dimostrare che il noto teorema dovuto a Moivre, del quale abbiamo già fatto uso, per l'esponente intero,

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha)^m=\cos m\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}m\alpha$$

vale ancora pel caso dell'esponente fratto.

Nel nostro ragionamento procederemo per induzione. Abbiamo già veduto (7) essere

$$\sqrt{\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha}=\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Ora porremo

$$\sqrt[3]{\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha}=x+y\sqrt{-1}$$

essendo x, y reali.

Elevando alla terza potenza avremo

$$\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\alpha=x^3+3x^2y\sqrt{-1}-3xy^2-y^3\sqrt{-1}$$

dalla quale le due seguenti

$$\cos\alpha=x^3-3xy^2$$

$$\mathrm{sen}\alpha=3x^2y-y^3$$

che elevate al quadrato e sommate, dopo semplici riduzioni, ci danno

$$\cos^2\alpha+\mathrm{sen}^2\alpha=x^6+2x^4y^2+3x^2y^4+y^6$$

e quindi

$$(x^2+y^2)^3=1$$

e tenuto conto della sola radice reale avremo

$$x^2+y^2=1.$$

la quale, come conseguenza delle due superiori equazioni, deve coesistere con esse, onde nella prima eliminato y^2 e nell'altra x^2, otterremo

$$\cos\alpha=4x^3-3x$$

$$\mathrm{sen}\alpha=3y-4y^3$$

ovvero

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$$

$$4y^3 - 3y + \operatorname{sen}\alpha = 0.$$

Ora dalle funzioni circolari abbiamo

$$\operatorname{sen}3m = 3\operatorname{sen}m - 4\operatorname{sen}^3 m$$

$$\cos 3m = 4\cos^3 m - 3\cos m$$

e fatto

$$3m = \alpha, \quad m = \frac{\alpha}{3}$$

ne deduciamo le seguenti

$$4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\alpha = 0$$

$$4\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{3} - 3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} + \operatorname{sen}\alpha = 0.$$

Se confrontiamo ordinatamente queste due equazioni con quelle espresse per x ed y riconosceremo essere

$$x = \cos\frac{\alpha}{3}, \quad y = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3},$$

Dunque

$$\sqrt[3]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{3} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}.$$

Se si prende a considerare

$$\sqrt[4]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha}$$

essendo allora

$$\sqrt[4]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{\sqrt{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha}}$$

e perchè

$$\sqrt{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

avremo

$$\sqrt[4]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

e quindi

$$\sqrt[4]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{4} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4}.$$

Si ponga ora

$$\sqrt[5]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = x + y\sqrt{-1}$$

e si elevi alla 5ª potenza, otteniamo

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha = x^5 + 5x^4y\sqrt{-1} - 10x^3y^2 - 10x^2y^3\sqrt{-1} + 5yx^4 + y^5\sqrt{-1}$$

dalla quale le due seguenti

$$\cos\alpha = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$$

che quadrate e sommate, dopo semplici riduzioni, danno:

$$x^{10} + 5x^8y^2 + 10x^6y^4 + 10x^4y^6 + 5\,x^2y^8 + y^{10} = 1$$

ovvero,

$$(x^2 + y^2)^5 = 1,$$

e tenuto conto della radice reale è:

$$x^2 + y^2 = 1$$

e quindi ne deduciamo prontamente

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos\alpha = 0$$

$$16y^5 - 20y^3 + 5y - \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Ma le funzioni circolari ci danno

$$16\cos^5 m - 20\cos^3 m + 5\cos m - \cos 5m = 0$$

$$16\operatorname{sen}^5 m - 20\operatorname{sen}^3 m + 5\operatorname{sen} m - \operatorname{sen} 5m = 0$$

e posto

$$5m = \alpha, \quad m = \frac{\alpha}{5}$$

otterremo

$$16\cos^5\frac{\alpha}{5} - 20\cos^3\frac{\alpha}{5} + 5\cos\frac{\alpha}{5} - \cos\alpha = 0$$

$$16\operatorname{sen}^5\frac{\alpha}{5} - 20\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{5} + 5\operatorname{sen}\frac{\alpha}{5} - \operatorname{sen}\alpha = 0$$

e dal confronto di queste con l'equazioni date per x, e per y ne deduciamo

$$x = \cos\frac{\alpha}{5}, \quad y = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{5}$$

Dunque

$$\sqrt[5]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{5} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha}{5}.$$

Per la radice 6ª, abbiamo

$$\sqrt[6]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha} = \sqrt{\sqrt[3]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha}}$$

ma

$$\sqrt[3]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{3} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{3}$$

dunque

$$\sqrt[6]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha} = \sqrt{\cos\frac{\alpha}{3} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{3}}$$

ed in fine

$$\sqrt[6]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{6} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{6}.$$

Continuando il medesimo ragionamento concluderemo in generale essere

$$\sqrt[m]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{m}$$

Ora dico che se questa relazione ha luogo per l'indice m del radicale, ha luogo ancora per l'indice $m+1$.

Di fatti si ponga

$$\sqrt[m+1]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha} = \cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen}z$$

elevando alla potenza di grado $m+1$ risulta

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha = \cos(m+1)z + \sqrt{-1}\,\text{sen}(m+1)z$$

dalla quale

$$\cos\alpha = \cos(m+1)z, \quad \text{sen}\alpha = \text{sen}(m+1)z$$

Gli archi α, $(m+1)z$ avendo il seno e coseno eguali in valore e segno, dunque sono contermini e tra le differenti eguaglianze ha luogo ancora

$$\alpha = (m+1)z \quad \text{da cui} \quad z = \frac{\alpha}{m+1}.$$

Dunque

$$\sqrt[m+1]{\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\text{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{m+1} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{m+1}.$$

Ora la nostra relzione ha luogo per

$$m = 2, = 3, = 4, = 5, \ldots\ldots$$

dunque essa vale per tutti i valori interi e positivi della m.

COMUNICAZIONI

Tuccimei, Prof. G. – *Presentazione di una sua nota* (1):

Il ch. sig. prof. G. Tuccimei lesse una nota col titolo: *Contribuzione alla geologia dell'interno di Roma*, nella quale rendeva conto dei terreni venuti in luce in diversi punti della città ad occasione delle demolizioni e fondazioni di edifizii. Citò il rinvenimento di una sabbia silicea, giallastra, grossolana, trovata circa all'ordinata 27m, in un cavo a via del Boschetto, nella valle tra il Viminale e l'Esquilino. Mostrò come questa sabbia doveva essere la continuazione di quella rinvenuta dall'A. sotto l'Oppio, nello scavo del collettore municipale, e rappresentata in *h* nella sezione geologica dell'Esquilino già da lui pubblicata. Sotto questa sabbia comparve una ghiaia a ciottoli irregolari e voluminosi, alcuni calcarei, altri silicei. L'origine alluvionale di questi banchi è confermata da vestigia fossili di molluschi terrestri trovati nello stesso cavo, ma ad un livello inferiore. Il Brocchi trovò sotto la stessa via del Boschetto sabbia mista a nodi di travertino, ma il punto da lui citato è lontano da quello dell'attuale cavo, cioè trovasi presso al versante opposto che scende dal Viminale. Qui poi la presenza del travertino è confermata da alcuni cavi eseguiti in via Clementina, dove è apparso allo scoperto sotto al terreno di scarico: 1º un banco di tufo granulare di circa 1m di spessore: 2º uno di tufo terroso rossastro di circa 2m: 3º una sabbia calcare giallo-bruna qua e là concrezionata, di appena 0m, 40: 4º una argilla turchina omogenea, che continuava a 6m dal piano stradale. In tre pozzi poi praticati sullo stesso luogo si è trovato alla quota di 28m in 29m sul mare un banco di travertino durissimo a concrezioni tubiformi. Questo probabilmente è addossato ai terreni precedenti, nella loro parte inferiore, mentre la superiore apparisce scoperta sopra al livello del piano stradale, la cui pendenza è fortissima. Alcuni anni fa il prof. Keller osservò lo stesso banco di travertino a pochi passi di distanza, cioè alla gradinata di via dei Zingari, e il Brocchi trovò concrezioni isolate nella stessa via Clementina, ma in un punto più declive di quello in questione.

Più importante è la sezione venuta in luce sulla destra del Tevere all'ordinata 49m sul colle Vaticano, e precisamente nel giardino della Pigna, dove si cavano le fondazioni per la colonna da erigere ivi in memoria del

(1) Questa nota è stata pubblicata nel vol. I delle Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei.

Concilio ecumenico. Sotto a uno scarico di appena 1m, si è trovato: 1° una sabbia fina, argillosa, simile al limo che depone il Tevere nelle sue piene: 2° una ghiaia minuta, incoerente, mista a sabbia silicea e con molti elementi vulcanici: 3° una sabbia silicea grossolana con cristallini quasi intieri di augite, granuli di magnetite, ecc.: 4° altra ghiaia con stratarelli neri, ricchi di granuli magnetici e tracce vulcaniche più abbondanti. In questa si trovarono pure frammenti di Diatomee: 5° finalmente un bel tufo granulare, bigio, omogeneo. L'A. mostrò come questa formazione addossata alle assise plioceniche, sia uno dei più recenti depositi alluvionali dell'interno di Roma; come i detriti vulcanici contenutivi sieno da ritenersi d'origine laziale; come le ghiaie per la loro composizione e giacitura ricordino quelle di Tor di Quinto e della vallata dell'Aniene. Citò le osservazioni del Breislak, dal Brocchi e del Ponzi sullo stesso lato del Tevere, mostrando come di addossamenti alluvionali a quell'altezza, sopra i terreni pliocenici sulla destra del Tevere, non si avessero fino ad ora che vaghe indicazioni.

Ragona, Prof. D. – *Presentazione di una sua memoria* (1):

Il socio corrispondente ch. sig. prof. Domenico Ragona per mezzo del Segretario presentò all'Accademia una sua memoria, nella quale l'A. applica un nuovo metodo alla ricerca delle leggi della frequenza dei venti relativamente all'orizzonte di Modena. Divide il suo lavoro in due parti, concernenti il periodo annuale e il periodo diurno. Riguardo al periodo annuale dimostra che i venti dividonsi in due classi. La prima comprende quei venti che hanno nel corso dell'anno tre massimi e tre minimi di frequenza. La seconda quelli che hanno nello stesso periodo due massimi e due minimi di frequenza. Di ciascuna delle classi mette in chiaro le relazioni con altri fenomeni così della meteorologia, come del magnetismo terrestre. Riguardo al periodo diurno l'A. dimostra, che in tutto l'anno vi è in esso periodo un tipo fondamentale della frequenza dei venti. Questo tipo fondamentale diurno presenta nel corso del giorno tre istanti di massima e tre istanti di minima frequenza. Gli otto venti principali seguono esattamente nelle loro fasi di frequenza o gli istanti del tipo fondamentale ovvero gli istanti intermedii. In ultimo luogo stabilisce le relazioni tra il tipo fondamentale di frequenza e le fasi diurne così della velocità del vento, come delle oscillazioni dell'ago magnetico di declinazione.

(1) Tale lavoro viene inserito nel vol. II° delle Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei.

De Rossi, Prof. M. S. — *Considerazioni su di una forma di moti del suolo* :

Il Prof. Michele Stefano de Rossi richiamò l'attenzione degli adunati sulla erroneità dell'opinione generale che si ha intorno agli studi moderni geodinamici, considerandoli come pure esercitazioni scientifiche senza pratiche applicazioni. Ricordò d'aver su questo tema tenuto una apposita conferenza in Torino durante l' ultima esposizione nazionale. Disse poscia volere nell'odierna seduta considerare un punto speciale e nuovo di applicabilità all'edilizia di una proprietà o forma riconosciuta nei movimenti sismici del suolo. Fece notare come oltre ai lenti movimenti detti microsismici sempre insensibili ed ai terremoti istantanei talora sensibili e talora insensibili, avvengano altri veri terremoti grandiosi, quantunque insensibili per effetto della lentezza delle onde terrestri. Considerò peraltro gli effetti e la potenza di queste onde, non che la loro relativa frequenza; lo che dimostrò non poter essere indifferente per gli edifici e dovere invece lentamente agire per sconnetterli, lesionarli, alterarne la verticalità. Svolse le prove da lui raccolte circa questi fatti, fra le quali mise in luce ciò che generalmente non si avverte, la determinazione cioà delle frane, sia nelle cave, sia negli edifici in costruzione; le quali quantunque preparate dall'incuria o da altre condizioni statiche locali, ricevono poi la spinta finale da un terremoto insensibile o da un movimento del suolo dei sopra descritti. Conchiuse che queste sue riflessioni armonizzano, o per dir meglio completano le considerazioni proposte dal Mercalli in un suo recente opuscolo intitolato : *Le case che si sfasciano ed i terremoti.*

L'autore di questo scritto considera il pericolo al quale si espongono Roma e Milano coll'improvvisare nuovi quartieri costruiti poco solidamente ed eccessivamente elevati, nei quali disgraziatamente spesseggiano parziali rovine durante anche il periodo della stessa lavorazione.

L'autore teme che la medesima incuria si avrà nelle vaste costruzioni, che conseguiranno lo sventramento di Napoli. Per conseguenza egli vede in queste tre città necessario un provvedimento edilizio per tutelare la sicurezza degli abitanti contro i danni di possibili forti terremoti, dai quali la storia dimostra non essere punto esenti nè Milano, nè Roma, nè molto meno la vulcanica Napoli.

De Rossi, Prof. M. S. — *Presentazioni diverse di Soci* :

Il Segretario presentò da parte del socio ordinario Sig. Principe D. B.

Boncompagni un esemplare del *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, agosto 1884. Presentò inoltre un opuscolo del socio corrispondente A. Certes, intitolato: « De l'emploi des matières » colorantes dans l'étude physiologique et histologique des infusoires vi- » vants, » ed un lavoro a stampa del socio corrispondente prof. Pietro M. Garibaldi sulle « Variazioni ordinarie e straordinarie del magnete di » declinazione diurna osservate in Genova nel periodo 1872-84 ».

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

Lettere di ringraziamento del Prof. G. Mercalli e Prof. Stefano Rossi, per la loro nomina a soci corrispondenti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Prof. M. Azzarelli. – Prof. F. Ladelci. – Cav. G. Olivieri. - Prof. G. Tuccimei. – Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

CORRISPONDENTI: Mons. B. Grassi Landi.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Académie Commerciale catholique de Montreal. Année académique* 1873—74. Montréal, 1874. in-8.°
2. *A Few of the Many Points of Interest noted in a Tour of Canada*. Toronto 1884. in-8.°
3. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*. Vol. XX, disp. 5ª. — Torino, 1885. in-8.°
4. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXXII, 1884—85. — Serie IV. — Rendiconti. Vol. I. — Fasc. 12°. Roma, 1885. In-4.°
5. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba*. — T. VII. — Entrega 4ª. — Buenos Aires, 1885. In 8.°
6. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma*. — A. XI. — n. 2. — Roma, 1884. In 8.°
7. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*. — T. XVII. — Agosto 1884. — Roma, 1884. In-4.°
8. *Canadian Pacific Railway eastern division*. Montreal, 1882 in-8.°
9. CERTES (A.) — *De l'emploi des matières colorantes dans l'étude physiologique et histologique des infusoires vivants*. — Paris, 1885, in-8.°
10. *Crónica científica*. — A. VIII. N. 179, 180. — Barcelona, 1885. In-8.°
11. EKHOLM (N.) et HAGSTROM (K. L.) — *Mesures des hauteurs et des mouvements des nuages*.
12. GARIBALDI (P. M.) — *Variazioni ordinarie e straordinarie del magnete di declinazione diurna osservata in Genova nel periodo* 1872—84. — Genova 1885. in-8.°
13. *Journal de la société physico-chimique russe*. — T. XVII. n.° 4, 5. S.t Pétersbourg 1885. In-8.°
14. *La Civiltà Cattolica*. A. XXXVI, serie XII, Vol. X, quad. 839, 840. Firenze 1885. In-8.°
15. LIOY (P.) — *Il Dottor Beggiato*. — *Commemorazione*. — Vicenza, 1885, in-8.°
16. *Polybiblion*. — *Revue bibliographique universelle*. — *Partie littéraire*. — Deuxième série. T. XXI. — XLIIIe de la collection. — Ve livraison. — Mai — Paris, 1885. In-8.°
17. —— *Partie technique*. — IIe série, — T. XI. — XLVe de la collection. — Ve livraison. Mai. — Paris, 1885. In-8.°
18. *R. Comitato Geologico d'Italia*, 1885. — Bollettino n. 3 e 4. Roma, 1885. In-8.°
19. *Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). A. XXIV, fasc. 3.° Marzo 1885. — Napoli, 1885, in-4.°
20. *Rendiconto delle sessioni dell'Accademia reale delle scienze dell'Istituto di Bologna*. Anno 1884—85. — Bologna, 1885. In-8.
21. *Rivista di Artiglieria e Genio*. — Aprile 1885. — Roma, 1885. in 8.°
22. *The Canadian Antiquarian ande Numismatic journal*. — Vol. V, n.° 3; — Vol. VIII, n.° 2. — Montreal 1877, 1879. — in-8.°
23. *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society*. — Vol. IV. (N. S.) — Part 5. Dublin, 1884. In-8.°
24. *The scientific Transactions of the Royal Dublin Society*. Vol. III. (Serie II). IV, V, VI. Dublin, 1884—85. In-4.°

INDICE DELLE MATERIE
DEL VOLUME XXXVIII
(1884–1885)

MEMORIE E NOTE

COMUNICAZIONI

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

COMITATO SEGRETO

Cromo-lit. Spithöver

Gromo-lit. Spithöver

Cromo-lit. Spithöver

Cromo-lit. Spithöver

Cromo-lit. Spithöver

CIRRI
Aut. Est. Prim. Inv.
CUMOLI
Aut. Est. Prim. Inv.
00
9 3 12 7
9 3 12 7
9 3 12 7
9 3 12 7
9 3 12 7
9 3 12 7
9 3 12 7
9p 3 12 7a
00

Cromo-lit. Spithover